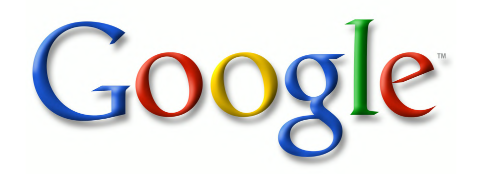
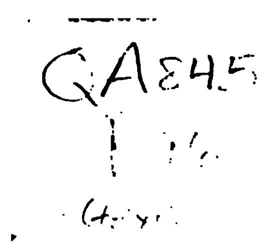
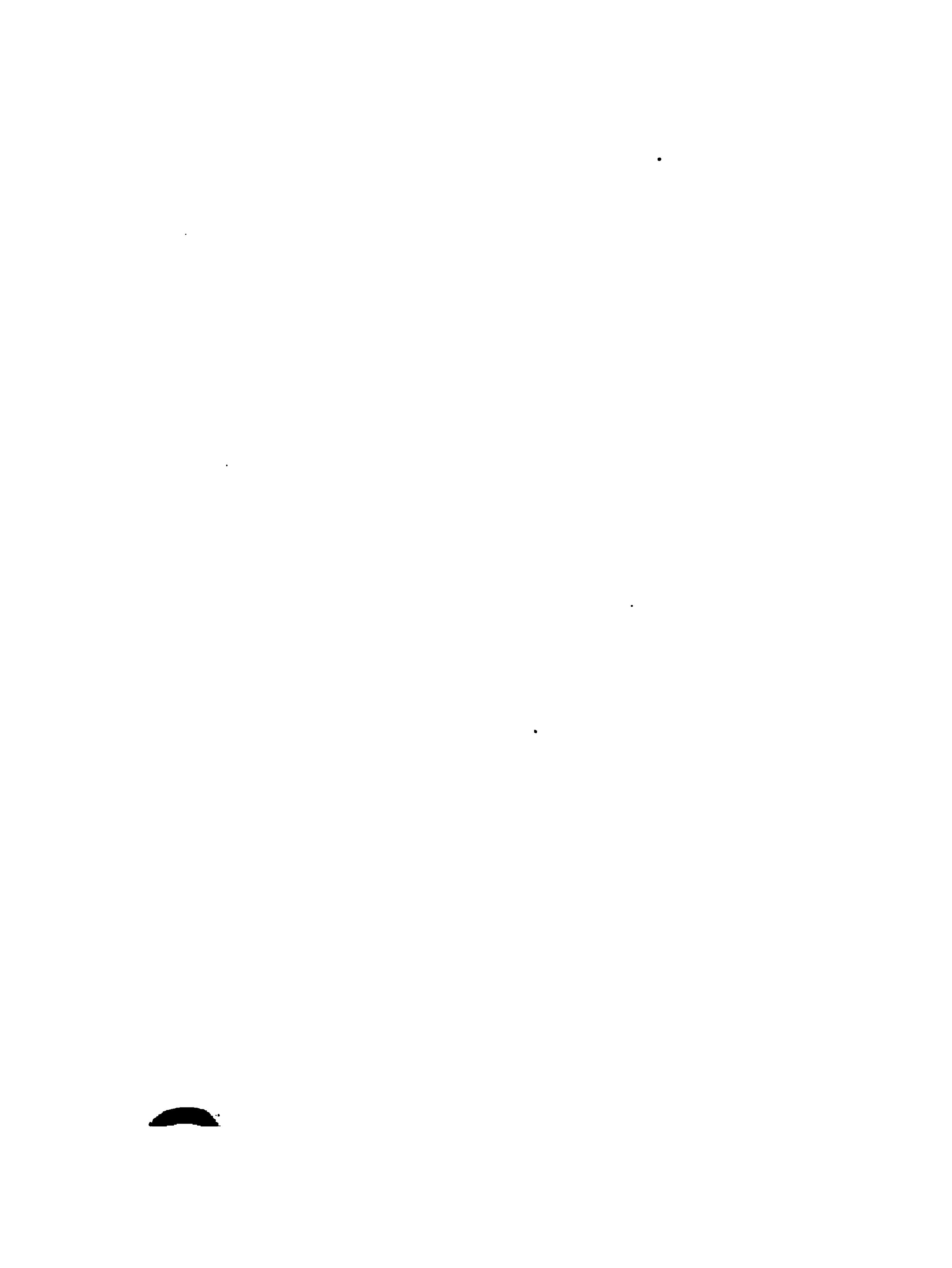








VERSUCH

EINER

GRAPHISCHEN DYNAMIK.

VON

Dr. R. PROELL,

Ingenieur der Niederschlesischen Maschinenbau-Gesellschaft in Görlitz, vorm. Assistent für Kinematik und Maschinenlehre an der Kgl. polytechnischen Schule in Aachen, Mitarbeiter des Civilingenieur.

Mit einem Atlas von 10 lithographirten Tafeln.

Leipzig.
Verlag von Arthur Felix.
1874.

Vorwort.

Nachdem der Inhalt des vorliegenden Werkes bis auf wenige redactionelle Aenderungen und Umstellungen im Jahrgang 1873 von A. Bornemann's „Civilingenieur“ unter dem Titel „Begründung graphischer Methoden zur Lösung dynamischer Probleme“ erschienen ist, übergebe ich hiermit dem technischen Publikum diese Abhandlung als eignes Werk nebst zugehörigem Atlas unter dem kürzer gefassten Titel „Versuch einer graphischen Dynamik“.

Es ist mir ein Bedürfniss, auf das Zustandekommen dieser Arbeit, welche mich mehr als drei Jahre fast unausgesetzt beschäftigt hat, den Zweck und Inhalt derselben näher einzugehen.

Die Arbeitstheilung hat sich, wie in der Praxis, so auch in der Theorie für die Vermehrung unsers Wissens als das richtigste Princip erwiesen. Während es vor noch nicht allzulanger Zeit einem Lehrer der Mechanik wohl möglich war, sich in den verschiedensten Anwendungen dieser Wissenschaft auf der Höhe der Zeit zu erhalten und seinen Schülern ein richtiges Verständniss derselben beizubringen, ist jetzt eine Specialisirung durch das rapid anwachsende Material geboten. Die Maschinen-, Ingenieur- und Baumechanik, die Graphostatik, Kinematik und mechanische Wärmetheorie sind, obgleich Theile einer einzigen Wissenschaft, der Mechanik, doch schon reich ausgebildete Disciplinen, deren Einzelstudium jetzt ebensoviel Zeit und Anstrengung kostet, als früher die ganze Mechanik im unentwickelteren Zustande. Die wichtigste Veranlassung, die Mechanik nach bestimmten Richtungen hin auszuarbeiten, hat aber ausser dem Bedürfniss der Ge-

lehrten überhaupt, ihre Arbeiten zu specialisiren, auch die Mathematik selbst gegeben, in Folge ihres eigenen Entwicklungsganges.

Seit Bestehen der Infinitesimalrechnung haben sich die Gelehrten mehr oder minder angestrengt, die mechanischen Probleme auf rein analytischem Wege erschöpfend zu behandeln. Es ist ihnen dies bis zu einem gewissen Grade geglückt, und in der Anwendung der Mechanik auf die Bewegung der Weltkörper hat der menschliche Geist, wie bekannt, die herrlichsten Triumphe gefeiert. Andrerseits hat aber auch die Erfahrung gelehrt, dass die Probleme, welche die Natur stellt oder der Erfindungsgeist des Menschen, mit den Methoden der Infinitesimalrechnung und höheren Analysis nur in vereinzelten Fällen vollständig gelöst werden können, welche, um nur zugänglich zu werden, mitunter durch recht gewagte Annahmen zuvor vereinfacht werden mussten. Ferner hat es sich gezeigt, dass die grosse Menge von Gleichungen und algebraischen Functionen, Ausdrücke etc., hinter denen sich die mechanischen Gesetze gewissermassen verschanzen, sehr oft ein keineswegs klares übersichtliches Bild von den statthabenden Vorgängen darbieten. Ganz besonders ist dies auch in der technischen Mechanik der Fall. Dem theoretisch gebildeten Techniker, welchem vor lauter Sorgen um die Praxis allmälich die Uebung und Sicherheit im analytischen Rechnen abhanden kommt, ist es vor Allem darum zu thun, ein klares übersichtliches Bild von dem mechanischen Vorgang zu haben, etwa in Gestalt einer Zeichnung oder eines Diagrammes, wodurch er auf kürzestem Wege zu den numerischen Werthen gelangen kann, die er für die practische Ausführung nöthig hat. Nachdem in der reinen Mathematik eine Umkehr zu exacten geometrischen Vorstellungen durch Begründung der neueren Geometrie angebahnt war, wurden auch im weiten Gebiete der technischen Mechanik mit grossem Glück Versuche angestellt, mechanische Vorgänge auf graphischem Wege zu untersuchen. Zeuner's Schieberdiagramme sind weit und breit bekannt und bilden zur Zeit die einzige reelle Grundlage jeder Schiebersteuerungsconstruction. Ebenso haben die Arbeiten Culmann's, die Beanspruchung von Balken und stabilen Constructionen durch äussere Kräfte graphisch darzustellen, bereits eine allgemeine Anerkennung und Verbreitung gefunden. In neuester Zeit hat Aronhold in Berlin die Sätze und Constructionen der kinematischen Geometrie (geometrischen Bewegungslehre) zu einem umfassenden Vortrag und einer lesenswerthen

Abhandlung in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen, Jahrgang 1872, zusammengestellt. Ein eingehendes Studium der kinematischen Geometrie, dieser neuesten hochwichtigen Errungenschaft in der Mechanik, welche ich während meiner Anstellung am Polytechnicum in Aachen selbst vorzutragen Gelegenheit fand, reifte in mir die Idee zur Ueberzeugung, dass auch die Probleme der Dynamik ebenso wie der Statik einer graphischen Behandlung zugänglich sein müssten, dass sich auch in der Dynamik Methoden müssten erdenken lassen, die durch Zeichnung, ähnlich wie es in der graphischen Statik geschieht, auf kürzestem Wege die Abhängigkeit gewisser Grössen von einander darstellen und zu exacten numerischen Werthen führen. Wohl war ich, als ich mich an diese Arbeit machte, von der Schwierigkeit durchdrungen, dieselbe zu einem befriedigenden, erfolgreichen Abschluss zu bringen. Nachdem es mir aber gelungen war, einzelne Methoden und Sätze der „graphischen Dynamik" (es sei mir gestattet, diese charakteristische Bezeichnung zu benützen) fruchtbringend zu verwerthen (siehe meine beiden im „Civilingenieur" Jahrgang 1872 erschienenen Abhandlungen „Ueber die Beschleunigungen in Pleuelstangen und Berechnung der durch dieselben hervorgerufenen Maximalbiegungsspannung" und „Die Mechanik der Centrifugal-Regulatoren und deren pseudoastatische Aufhängung"), nachdem ich in dem einen Falle sogar in kurzer Zeit mich in die Lage versetzt sah, mit Hilfe der gedachten Sätze eine umfassende Gleichgewichtstheorie der Centrifugal-Regulatoren und neue Constructionen derselben begründen zu können, glaubte ich, dass auf die weitere Ausarbeitung solcher Methoden, insbesondere einer systematischen Zusammenstellung und Verbreitung derselben über das ganze Gebiet der Geodynamik, Zeit und Fleiss nicht vergebens verwendet sein möchten. Dabei will ich besonders hervorheben, dass die Ehrerbietung vor meinen ausgezeichneten Lehrern an der Kgl. Gewerbe-Academie in Berlin, insbesondere Herrn Professor Dr. Aronhold, und der Wunsch, durch eine grössere Arbeit im angedeuteten Sinne denselben meine Dankbarkeit zu bethätigen, ausser der eignen Liebe und Lust an selbstständigen Forschungen, die treibenden Momente gewesen sind. —

Was nun den Inhalt des Werkes anbelangt, so zerfällt derselbe in drei Theile. Im ersten Theil sind die Wirkungen äusserer Kräfte auf einen frei beweglichen materiellen Punkt behandelt. In den ersten Paragraphen ist eine geometrische Abhängigkeit

zwischen den drei Grössen, der Beschleunigung, Geschwindigkeit und Zeit behandelt. Die hier mitgetheilten Constructionen dürften wohl ein Pendant bilden zu den in der graphischen Statik üblichen Constructionen, die Momentencurve aus der Kraftcurve zu bestimmen. Ebenso wie in der graphischen Statik jeder beliebig grossen Ordinate der Kraftcurve in ganz bestimmter Weise (bekanntlich durch Construction des Seil- und Kräftepolygons) eine Ordinate zugewiesen wird, welche das entsprechende Biegungsmoment darstellt, so sind auch hier einander entsprechende Werthe graphisch auf einander bezogen und auseinander hergeleitet.

Die Bezeichnung „entsprechende Werthe“ ist, wie in der neueren Geometrie und den ihr verwandten geometrischen Disciplinen, auch in der kinematischen Geometrie üblich, und die Art und Weise, wie zwei Werthe einander entsprechen oder als entsprechende ermittelt werden können, hat in der Geometrie dieselbe Bedeutung wie das allbekannte Verfahren in der Analysis, Gleichungen aufzustellen und zu lösen.

Nun ist aber bekannt, wie wenig Gleichungen im Allgemeinen in geschlossener Form lösbar sind, wie bald man in der Integralrechnung die Grenzen erreicht, welche noch ein Zurückführen des Integrals auf einen geschlossenen algebraischen Ausdruck gestatten. Solche Grenzen kennt die graphische Methode nicht. Wie das Gesetz auch beschaffen ist, nach welcher sich die treibende Kraft oder die Geschwindigkeit des materiellen Punktes als Function des Weges ändert, wir können jeder Beschleunigung eine Geschwindigkeit und einen Zeitwerth als entsprechende Grössen zuweisen und sind im Stande, in kürzester Zeit, ohne viel Nachdenken, den bezüglichen numerischen Werth zu ermitteln, dessen Kenntniss gerade die Praxis vornehmlich verlangt. Die Grenzen, bis zu welchen die graphischen Methoden mit Vortheil verwendet werden können, sind anderer Natur, umschliessen aber ein weit grösseres Gebiet der practischen Anwendung, als es bei der Analysis der Fall ist. Ich habe mich bemüht, die allgemein festgestellten Methoden für die Praxis zuzustutzen und deren Fruchtbarkeit an speciellen Aufgaben zu erweisen. In diesem Sinne ist auch das zweite Kapitel, welches sich mit der Bewegung eines materiellen Punktes in krummer Bahn befasst, durchgeführt. Hier zeigt sich bereits die umfassende Anwendbarkeit der graphischen Methoden und die Tragweite und Uebersichtlichkeit der durch dieselben erzielten Resultate. Wenn ich mich unterfangen habe,

die graphischen Methoden sogar auf die Planetenbewegung zu übertragen, so ist es nicht, um dort wesentlich Neues festzustellen; es ist vielmehr der Wunsch, dem mathematisch Gebildeten, wie er aus polytechnischen Hochschulen hervorgeht, mit Hilfe des Hodographen etc. . . . . . ein anschauliches Bild dieser hoch interessanten Bewegung zu entwerfen. Der Anhang zum ersten Theil ist mehr als eine weitere Anwendung der im ersten Theil enthaltenen Methoden zu betrachten, denn als besonderer Theil. In demselben mache ich den geehrten Leser besonders auf die Bewegung eines schweren Punktes auf einem Cycloidenbogen aufmerksam und die Gesetzmässigkeit derselben, welche auf graphischem Wege festgestellt, in nahe Verwandtschaft zu den Gesetzen der einfachen harmonischen Bewegung tritt.

Der zweite Theil des Werkes behandelt die Wirkungen äusserer Kräfte auf ein frei bewegliches unveränderliches System von Massen. Der Inhalt desselben dürfte interessiren. Das reiche Gebiet, welches sich erschliesst, indem man die unter bestimmten Kraftwirkungen stattfindende Bewegung eines in sich starren Systems von Massen der Behandlung durch die im ersten Theil gegebenen Methoden und die kinematische Geometrie zugänglich macht, ist von mir nur versuchsweise betreten. Die gerade hier scharf ausgeprägte Charakteristik des „Einander entsprechen" bestimmter Grössen, die Construction neuer polarer Curven, analog derjenigen des Hodographen, die Beziehung ihrer Elemente zu der wirklich statthabenden Bewegung, entspricht dem Geiste der neueren Geometrie. Ueber den Werth der betreffenden Constructionen und Methoden mag das Kapitel V „Anwendungen" entscheiden.

Der dritte Theil endlich, welcher die Wirkungen äusserer Kräfte in Mechanismen behandelt, bildet ein in sich abgeschlossenes Ganze. Der Zeit nach zuerst entstanden, zog ich es vor, diesen Theil zum letzten zu machen, zumal derselbe im Gegensatz zu den beiden vorhergehenden besonders für den Maschinentechniker verfasst ist.

Die Wirkungen der Kräfte in Mechanismen und maschinellen Systemen sind oft so überaus complicirter Natur, dass hier die genaue Darstellung derselben durch Diagramme und Constructionen sehr wünschenswerth erscheint. Ich erinnere nur an den einfachen, in der Praxis so vielfältig benützten Kurbelmechanismus, für den, zumal wenn er zwei- und mehrfach ist, die Rechnungen,

betreffend die lebendige Kraft, die Grösse der einem gewissen Ungleichförmigkeitsgrade entsprechenden Schwungmassen, die Inanspruchnahme durch die beschleunigenden Kräfte bisher wegen ihrer Complicirtheit meistens unter der Annahme durchgeführt werden mussten, dass die Länge der Schubstange unendlich sei. Kommt dazu noch eine complicirte Kraftwirkung, z. B. veränderlicher Widerstand und veränderliche treibende Kraft, wie solche beim Kurbelmechanismus einer Expansionsmaschine auftritt, so kann von einer genauen analytischen Berechnung fast gar nicht mehr die Rede sein. Die graphischen Methoden für die Ermittelung der bez. Werthe zeigen sich dagegen höchst fruchtbar und bei einer nur geringen Fertigkeit im Verzeichnen der Diagramme und Geschwindigkeitscurven etc. . . . dürfte die aufgewendete Mühe durch die unmittelbar für die Praxis verwendbaren Resultate reich belohnt werden. Ich verweise hierbei besonders auf Kapitel VIII, in welchem die überaus leichte und schnelle Ermittelung der zur Berechnung von Schwungradmassen nothwendig zu bestimmenden Stellen der grössten und kleinsten Geschwindigkeiten in einem Kurbelkreis, interessiren wird; ebenso Kapitel IX, in welchem eine bis jetzt unbekannte Ermittelung von Centrifugalkräften und ihrer Resultante mit zu Hilfenahme des Wendekreises der kinematischen Geometrie enthalten ist. In demselben ist auch die Beanspruchung einer materiellen Geraden durch beschleunigende Kräfte auf graphischem Wege ermittelt. Mögen auch diese Resultate meinen Methoden Anhänger erwerben.

Ich habe mich bemüht, in Hinsicht auf die noch mässige Verbreitung, welche die kinematische Geometrie bis jetzt gefunden, die Sätze und Constructionen, auf denen ich fussen musste, in Text und Anmerkung möglichst kurz zu präcisiren. Im Uebrigen verweise ich auf Schell's „Theorie der Bewegung und Kräfte" und auf Aronhold's „Abhandlung in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen" Jahrgang 1872, sowie auf andere Autoren.

Indem ich hiermit das Werk der Oeffentlichkeit übergebe, bitte ich die Herren Fachgenossen, mir eine nachsichtige Beurtheilung nicht versagen zu wollen.

Görlitz, im März 1874.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Theil.

Seite

Ueber die Wirkungen äusserer Kräfte auf einen frei beweglichen materiellen Punkt.

I. Kapitel. Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes in gerader Bahn.

II. Kapitel. Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes in krummer Bahn.

Anhang zum ersten Theil.

III. Kapitel. Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn.

II. Theil.

Ueber die Wirkungen äusserer Kräfte auf ein frei bewegliches in sich unveränderliches System von Massen.

IV. Kapitel. Graphische Bestimmung der kinematischen (die Bewegung des Systems festlegenden) Elemente aus den Kraftwirkungen.

Seite

III. Theil.

Ueber die Wirkungen äusserer Kräfte in Mechanismen (zwangläufig bewegten unveränderlichen Systemen von Massen).

I. Theil.

Ueber die Wirkungen äusserer Kräfte auf einen frei beweglichen materiellen Punkt.

I. Kapitel.

Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes in gerader Bahn.

§. 1. Die mechanischen Grundbegriffe der Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit, der lebendigen Kraft u. s. w., haben in der Mechanik ihre bestimmten Definitionen, die wir hier als bekannt voraussetzen. Die Untersuchung, in welcher Abhängigkeit diese Grössen zu einander stehen, welche Beziehungen sich zwischen ihnen aufstellen und welche Folgerungen sich aus ihnen ziehen lassen, war bisher eine Aufgabe der analytischen Mechanik.

Gemäss der Richtung, welche das vorliegende Werk verfolgt, werden wir in der Folge mit Benutzung der in der analytischen Mechanik aufgestellten Principien vornehmlich auf eine geometrische Deutung der mechanischen Grundbegriffe hinzielen, und auf zeichnerische Weise eine Grösse aus der andern herzuleiten suchen.

Indem wir uns nun an diese Aufgabe heranmachen, erscheint nichts so naheliegend als die Beantwortung der Frage, ob sich eine geometrische Beziehung zwischen der Beschleunigung, Geschwindigkeit und verflossenen Zeit eines in Bewegung befind-

lichen Punktes aufstellen lässt und zwar zunächst eines in gerader Bahn sich bewegenden Punktes. Wir werden hierbei die Abhängigkeit zwischen den genannten Grössen passend theilen in der Art, dass wir zuerst eine geometrische Beziehung zwischen der Beschleunigung und Geschwindigkeit und dann eine solche zwischen der Geschwindigkeit und Zeit aufzustellen suchen.

Weitere Folgerungen aus den aufgestellten geometrischen Sätzen werden dann zu einer graphischen Bestimmung des Antriebes der Kraft, der Bewegungsgrösse und der Arbeitsstärke führen.

A) Geometrische Beziehung zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit.

§. 2. Die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse M ist bedingt durch die Richtung und Grösse der auf ihn wirkenden Kraft P. Ist erstere constant, so bewegt sich der materielle Punkt in einer geraden Bahn und die Richtung derselben ist die Richtung der Kraft.

Wir machen für die Folge die principiell wichtige Annahme, dass das Gesetz, wonach sich die Grösse der Kraft P ändert, als Function des Weges gegeben und graphisch durch eine Curve dargestellt sei, deren Abscissen die Wege und deren Ordinaten proportional P sind. Gerade diese Annahme, welche den allermeisten Problemen der Mechanik zu Grunde liegt, gestattet, wie es sich in der Folge herausstellen wird, eine ausschliesslich **graphische** Lösung; in um so höherem Grade erscheint es gerechtfertigt, gemäss der Tendenz dieses Werkes, diese Annahme allen späteren Untersuchungen zu Grunde zu legen.

Dividiren wir die Kraft P durch die Masse M, so ist

$\frac{P}{M}$ die bewegende Kraft pro Masseneinheit oder auch

kurz beschleunigende Kraft genannt. Wir bezeichnen sie in der Folge mit p. Da p, kinematisch definirt, die Beschleunigung ist, mit welcher sich die von der Kraft P afficirte Masse bewegt, so nennen wir die Curve, welche die Aenderung der beschleunigenden

Kraft als Function des Weges x darstellt, „Beschleunigungscurve" und bezeichnen sie durch das Symbol $p = f(x)$.

Bezeichnen wir ferner die Bahngeschwindigkeit des Punktes M mit v und tragen uns v als Ordinate senkrecht an der zugehörigen Stelle der Bahn auf, so erhalten wir in dem verbindenden Zug aller Endpunkte von v eine Curve, welche graphisch die Aenderung der Geschwindigkeit als Function des Weges darstellt. Die Gleichung dieser Geschwindigkeitscurve sei $v = \varphi(x)$. Ist nun eine der beiden gegeben, so fragt es sich, wie man die andere findet.

Nach dem Grundprincip der Dynamik, welches die Beziehung zwischen der bewegenden Kraft und der Beschleunigung des bewegten Punktes giebt, ist

$$P = M\frac{dv}{dt}, \text{ oder } \frac{P}{M} = p \text{ gesetzt}$$

$$p = \frac{dv}{dt}.$$

Multipliciren wir den Ausdruck rechts mit $\frac{dx}{dx}$ und beachten wir, dass $\frac{dx}{dt} = v$ ist, so geht die Gleichung über in

$$p = \frac{v \,.\, dv}{dx}.$$

Der Ausdruck $\frac{v \,.\, dv}{dx}$ ist die Subnormale der Curve $v = \varphi(x)$; denn nennen wir den Winkel, welchen die Tangente mit der Abscisse bildet τ, so ist

$$tg\,\tau = \frac{dv}{dx}.$$

Nun ist die Subnormale $= v\, tg\, \tau$, also auch $= \frac{v \,.\, dv}{dx}$ und wir haben den

Satz: Die um 90° gedrehte Subnormale der Geschwindigkeitscurve ist die Ordinate der Beschleunigungscurve.

Mit Hilfe dieses Satzes soll im Folgenden ein Verfahren entwickelt werden, wonach man im Stande ist, zeichnerisch die Geschwindigkeitscurve aus der Beschleunigungscurve und umgekehrt zu finden.

Zuvor sei noch bemerkt, dass p eine lineare Grösse ist; denn nennen wir G das Gewicht des materiellen Punktes, g die Beschleunigung der Schwere, so folgt $M = \frac{G}{g}$, also

$$\frac{P}{M} = p = \frac{P}{G} \cdot g,$$

p und v sind in der Einheit von g aufzutragen.

In der Folge werden wir, wenn es zweckmässig erscheint, im Ausdruck den bezeichneten Untersuchungen eine mehr praktisch mechanische, als rein mathematische Färbung geben, von einer **bewegten Masse** M oder einem **bewegten Körper** sprechen, statt von einem **materiellen Punkte von der Masse** M, wobei wir stillschweigend voraussetzen, dass die bewegte Masse keine Ausdehnung besitze, sondern **in einem Punkte concentrirt** sei.

Wir wollen nunmehr die Lösung folgender Aufgaben vornehmen:

§. 3. **Aufgabe: Es ist die Geschwindigkeitscurve gegeben, es soll die Beschleunigungscurve construirt werden.**

Wir theilen die Abscisse von O aus (Fig. 1, Taf. I), dem Anfangspunkte der Bewegung, in eine grössere Anzahl gleicher Theile A und errichten in denselben die Ordinaten $AB = v$. Dann ziehen wir die Linie BC normal zu den betreffenden Bogenelementen der Geschwindigkeitscurve (am zweckmässigsten mit Zuhilfenahme der Tangente) und drehen die Subnormale AC um 90^0 um den Fusspunkt der Ordinate. **Selbige ist die Ordinate** p **der gesuchten Beschleunigungscurve.** Erfolgt die Drehung der Subnormale, wie es in der Figur angedeutet ist, mit dem Zeiger der Uhr, so erstreckt sich, wenn v wächst, p von der Abscisse fort nach unten, wenn v abnimmt, aber nach oben. Diese Richtungsänderung der Ordinate p entspricht dem Vorzeichenwechsel bei der analytischen Berechnung und bedeutet, dass in dem einen Fall, wenn p sich nach unten erstreckt, eine beschleunigende Kraft, im andern Fall, wenn p sich nach oben erstreckt, eine verzögernde Kraft vorhanden ist.

Ist v constant, so ist die Subnormale also auch $p = o$, d. h.

es wirkt auf den Punkt M in dem betrachteten Augenblick keine Kraft, die Geschwindigkeit kann also auch keinen Zuwachs erleiden.

Man nimmt meistens an, dass sich die positive Richtung einer Linie nach aufwärts, die negative nach abwärts erstreckt. Da nun eine beschleunigende Kraft in der Rechnung mit einem + Vorzeichen, eine verzögernde Kraft mit einem — Vorzeichen behaftet ist, so scheint es ungerechtfertigt, wenn wir uns hieran nicht binden. Aber es ist dies in der That nicht nöthig; da späterhin die Beschleunigungscurve und Geschwindigkeitscurve stets zusammen vorkommen, so lehrt ein Blick auf letztere, welche Ordinatenrichtung bei ersterer auf eine beschleunigende oder verzögernde Kraft deutet. Zweckmässig erscheint es, die Beschleunigungscurve stets so zu verzeichnen, dass die Construction eine möglichst durchsichtige wird, und die Curven einander so wenig wie möglich stören. Die Zusammengehörigkeit beider Curven kennzeichnen wir in der Folge dadurch, dass wir an irgend einer Stelle den Viertelkreisbogen einpunktiren, welcher die Drehung der Beschleunigungsordinate p um 90^0 andeutet.

§. 4. **Umgekehrte Aufgabe.**

Es ist die Beschleunigungscurve gegeben, es soll die Geschwindigkeitscurve construirt werden.

Wir nehmen an, siehe Fig. 2, im Punkte A habe der materielle Punkt M die Geschwindigkeit v, dieselbe sei gemessen in der Einheit der Beschleunigung der Schwere, in der auch p gemessen ist.

Wir ziehen auf der Seite, nach welcher von A aus die Bewegung des Punktes erfolgt, ein System paralleler Linien senkrecht zur Bahn (zweckmässig zieht man dieselben in gleichen Abständen von etwa 2 Millimetern für eine Construction von der in Fig. 2, Taf. I gegebenen Grösse), nehmen die so erhaltenen Ordinaten $p = AD$ nach einander in den Zirkel und drehen dieselben, indem wir die Zirkelspitze in A stehen lassen, gegen den Zeiger der Uhr um 90^0. Dadurch gelangt Punkt D nach C und AC ist die Subnormale der zu construirenden Geschwindigkeitscurve. Wir lassen nun die andere Spitze des Zirkels in C stehen, erweitern denselben, bis die Spitze, welche vorhin in A stand, nach B gelangt und markiren in a und e die Schnittpunkte des Kreisbogens um C mit den beiderseits an der Ordinate v gelegenen

mittleren Parallelen. Der kleine Kreisbogen *ac* ist dann sehr angenähert das Bogenelement der Geschwindigkeitscurve.

Das nächstanliegende Bogenelement construiren wir nun auf dieselbe Weise, indem wir die nächste Ordinate p_1 um ihren Fusspunkt A_1 drehen. Ihr Endpunkt E gelangt nach F und die eine Zirkelspitze (die andere bleibt fest in F stehen) nach e. Der um F mit eF geschlagene Kreisbogen liefert zwischen den zugehörigen mittleren Parallelen das zweite Bogenelement *eo* der Geschwindigkeitscurve.

In dieser Weise fortfahrend können wir mit verhältnissmässig grosser Genauigkeit die Geschwindigkeitscurve durch Aneinandersetzung ihrer Bogenelemente verzeichnen. Die Grösse der Genauigkeit hängt freilich ab von der Güte des Zirkels und dem Geschick des Zeichners, dann aber auch von dem Verhältniss, in welchem die linearen Grössen der Zeichnung zu einander stehen.

Was die beiden ersten Punkte anbelangt, so habe ich die Construction der beiden Geschwindigkeitscurven auf Ordinatenpapier (Scizzirpapier) vorgenommen, wie solches im Handel mit einer Paralleltheilung von 2 zu 2 Millim. oder auch von 1 zu 1 Millim. und stärker ausgezogenen Linien von 10^{mm} Abstand vorkommt, und mich dabei überzeugt, dass das angegebene Constructionsverfahren, wenn man exact die Zirkelspitzen einsetzt, Werthe liefert, die nur um 1 bis höchstens 3 Proc. von den genau durch Rechnung ermittelten verschieden sind. Die Grösse des Fehlers ist in einigen später folgenden Aufgaben bestimmt und dadurch die Brauchbarkeit der erläuterten Methode erwiesen.

In Bezug auf den letzten Punkt, der zu grösseren Abweichungen Veranlassung giebt, ist es offenbar für die Construction der Geschwindigkeitscurve am ungünstigsten, wenn dieselbe von Null auf construirt werden soll. Ist die Anfangsordinate p_0 der Beschleunigungscurve einigermassen gross (etwa grösser als 10^{mm}, wenn die Construction auf dem erwähnten Ordinatenpapier vorgenommen wird), so schneidet der Kreis, welcher das erste Bogenelement giebt, unter sehr spitzem Winkel die mittlere Parallele. Hier ist die bedeutendste Fehlerquelle. Dieselbe ist freilich nicht so gross, wie es den Anschein hat, wenigstens schliesse ich dies aus der Uebereinstimmung der Resultate, welche in den weiterhin

folgenden Aufgaben sich einerseits durch die Construction, andererseits durch die Rechnung ergeben.

Die Feststellung und möglichste Beseitigung dieses Fehlers nehmen wir in folgender Weise vor:

Bestimmung der Fehlergrösse.

§. 5. Die rechnerische Ermittelung der Geschwindigkeit v, welche zum Wege x gehört, erfolgt bekanntlich aus der Gleichung der lebendigen Kraft

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_0^x p\,d\,x.$$

Der Abscisse x entspricht der Werth v, der Abscisse o der Werth v_0. Es folgt

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_0^x p\,d\,x.$$

Ist die Gleichung $p = f(x)$ gegeben und das Integral in geschlossener Form bestimmbar, so erhält man den wahren Werth von v. Andernfalls, wenn die rechnerische Bestimmung des Integrals nicht möglich ist, wird man doch sehr genau den Werth desselben durch mechanische Quadratur der Fläche bestimmen können, welche durch die Beschleunigungscurve über dem Wege x eingeschlossen ist. Nennen wir dieselbe F, so ist

$$\int_0^x p\,d\,x = F \text{ und } v = \sqrt{v_0^2 + 2\,F}.$$

Der hieraus ermittelte Werth von v ist, da F sehr genau zu bestimmen ist, sehr nahe der wahre.

Der Vergleich desselben mit dem der Construction entnommenen Werthe v giebt die Grösse des Fehlers.

Verkleinerung der Fehlerquelle.

§. 6. Man misst die Fläche F aus, welche bis zum Endpunkte einer beliebigen Wegstrecke von der Beschleunigungscurve eingeschlossen wird, berechnet die zugehörige Geschwindigkeit aus der Gleichung $v = \sqrt{v_0^2 + 2\,F}$ und construirt von diesem als Ordinate auf-

getragenen Werthe aus nach beiden Seiten die Geschwindigkeitscurve, bis diese in die Abscisse einschneidet. (Wir nehmen den ungünstigsten Fall an, dass $v_0 = 0$ ist.) Da der Anfangspunkt der Abscisse gegeben ist, so kann man die durch Construction entstehende Abweichung im Verlauf der Geschwindigkeitscurve durch deren Schnittpunkt mit der Abscisse feststellen. Der Fehler ist hierdurch freilich nicht beseitigt, fällt aber offenbar kleiner aus, als wenn man von Null auf die Geschwindigkeitscurve construirt und die Summe sämmtlicher Constructionsfehler auf die Endgeschwindigkeit wirft.

B) Geometrische Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Zeit. Zeitcurve.

Erste Methode: Bestimmung der Zeit durch Ausmessen von Flächen.

§. 7. Ist t die Zeit, welche verfliesst, während der Punkt M den Weg x zurücklegt, so findet man die Zeit t bekanntlich durch Integration der Gleichung

$$dt = \frac{dx}{v},$$

$$t = \int_0^x \frac{dx}{v}.$$

Wir setzen $v = \frac{a^2}{z}$, worin a^2 eine Constante und z eine neue Variable ist, und erhalten

$$t = \frac{1}{a^2} \int_0^x z \, . \, dx.$$

Wäre z als Function von x, d. h. $z = \psi(x)$ bekannt, so würde das Integral die über dem Wege x von dieser Curve eingeschlossene Fläche sein. Nennen wir dieselbe F, so würde folgen

$$t = \frac{F}{a^2}.$$

Die graphische Construction der Curve $z = \psi(x)$ können wir nun in folgender Weise ausführen, siehe Fig. 3, Taf. I. Die

Substitutionsgleichung $v = \frac{a^2}{z}$ stellt eine Hyperbel dar, bezogen auf ihre Asymptoten als Ordinatenaxen. Die eine Asymptote ist die Bahn des Punktes M, die andere die im Anfangspunkte ($x = o$) errichtete Normale.

a ist die Ordinate eines Hyperbelpunktes P, welcher von beiden Axen einen gleichen Abstand hat. Aus diesem Punkte und den Asymptoten lässt sich nun die Hyperbel mit Hilfe des Secantensatzes, nach welchem die Abschnitte zwischen ihr und den Asymptoten für jede beliebig durchgelegte Secante gleich gross sind, leicht verzeichnen. Zu dem Ende ziehen wir durch P eine Anzahl Strahlen, z. B. CD, und tragen die Entfernung des Punktes P vom Schnittpunkt mit der X-Axe PC, vom Schnittpunkt mit der X-Axe D ab, so dass $DE = PC$ ist. Haben wir auf diese Weise die Hyperbel $NPHT$ verzeichnet und legen durch den Endpunkt K irgend einer Geschwindigkeitsordinate $v = SK$ eine Linie parallel der X-Axe, so schneidet diese die Hyperbel im Punkte N. Da die Ordinate desselben v ist, so ist seine Abscisse die gesuchte Grösse z.

Nehmen wir nun diese Strecke z in den Zirkel und stecken von der Abscisse aufwärts dieselbe auf der Ordinate v ab, so dass $ST = z$ ist, so erhalten wir in T einen Punkt der gesuchten Curve $z = \psi(x)$. Dieselbe schneidet die Y-Axe, sobald eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 vorhanden ist. Ist dieselbe indess Null, so ist die erste Ordinate z unendlich, d. h. die Curve $z = \psi(x)$ nähert sich asymptotisch der Y-Axe. Die Ausmessung der von der Curve über dem Wege x eingeschlossenen Fläche giebt den Werth F. Verwandelt man die Fläche in ein Rechteck von der Höhe h und Basis x, so dass $F = h.x$ ist und zieht durch den Endpunkt der Ordinate h eine Parallele zur X-Axe, so schneidet dieselbe die Hyperbel in einem Punkte H. Die Abscisse ξ desselben ist die mittlere Geschwindigkeit v_m, mit welcher sich der Punkt M bewegen müsste, um in derselben Zeit den Weg x zurückzulegen. Denn da $v_m = \frac{x}{t}$ ist und $t = \frac{F}{a^2} = \frac{h.x}{a^2}$, so folgt

$$v_m = \frac{a^2}{h}.$$

Nun ist aber, da H ein Punkt der Hyperbel ist,

$$\xi . h = a^2,$$

$$\text{also } \xi = \frac{a^2}{h} = v_m.$$

In der Constructionszeichnung ist $x = 70^{mm}$, $F = 1062^{qmm}$, also

$$h = 1{,}51 \text{ und } v_m = 26{,}7.$$

Hieraus ergiebt sich

$$t = \frac{F}{a^2} = \frac{1062}{400} = 2{,}655 \text{ Secunden},$$

resp.

$$t = \frac{x}{v_m} = \frac{70}{26{,}7} = 2{,}621 \text{ Secunden}.$$

Man sieht, die Abweichung ist mit Rücksicht auf die Kleinheit der Constructionszeichnung sehr gering.*)

Zweite Methode: Construction der Zeitcurven.

§. 8. Wir stellen uns die Aufgabe, die Zeit nicht als Fläche, sondern als lineare Grösse darzustellen. Es ergeben sich hier zwei verschiedene Constructionen.

a) Zur Herleitung der ersteren stellen wir die Bedingung, dass, während der Punkt M seine gesetzmässige Bewegung vollzieht, ein vertical über demselben befindlicher Punkt μ mit constanter Geschwindigkeit eine gewisse Curve durchläuft, so dass die Projectionsbewegung des Punktes μ die wahre Bewegung des Punktes M ist.

Ist die Curve, welche dieser Hilfspunkt μ mit constanter Geschwindigkeit u durchläuft, bekannt, so geben die Horizontalprojectionen gleich langer Bögen die Wegstrecken, welche vom Punkte M in gleichen Zeiten zurückgelegt werden. Nennen wir σ die Bogenlänge der Curve, deren Horizontalprojection x ist, so ist die Zeit

---

*) Hier, wie an andern Stellen, habe ich die Ziffernwerthe den Originalzeichnungen entnommen, nicht den lithographirten Tafeln. Die bezüglichen Werthe in diesen im Vergleich mit den durch Rechnung gefundenen, können offenbar keinen richtigen Anhaltspunkt geben, da in ihnen offenbar noch andere Fehlerquellen, als blos die durch die Construction hervorgerufenen, vorhanden sind.

$$t = \frac{\sigma}{u}.$$

Um das graphische Verfahren zur Construction dieser Curve festzustellen, denken wir uns tangential an die gesuchte Curve im Punkte μ dessen Geschwindigkeit u angetragen und nennen den Winkel, welchen dieselbe mit der Abscisse einschliesst τ, Fig. 3, Taf. I. Da die Projection der Geschwindigkeit u auf die Abscisse gleich v ist, so folgt

$$v = u \cos \tau,$$

$$\text{resp. } \cos \tau = \frac{v}{u}.$$

Die Richtung des Bogenelementes über jeder Geschwindigkeitsordinate ist somit gefunden.

Graphisch ist dieselbe bestimmt, wenn wir um K, den vertical über M liegenden Punkt der Geschwindigkeitscurve, einen Kreis mit u beschreiben; derselbe schneidet die Abscisse in G und es ist der Winkel bei K der gesuchte Winkel τ.

Indem wir nun an beliebig vielen Stellen die beliebig gewählte Strecke u zwischen der Geschwindigkeitscurve und Abscisse einpassen, erhalten wir in der Neigung derselben auch die Richtungen der aufeinander folgenden Tangenten, durch deren Umhüllung die Curve des Punktes μ entsteht. Wir wollen diese Curve kurz die Zeitcurve nennen, weil ihr Bogen proportional der Zeit ist.

Construction der Zeitcurve.

Dieselbe geschieht sehr genau in folgender Weise.

Wir wählen für die Geschwindigkeit u des Hilfspunktes μ eine ganz beliebige Länge, die aber als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks grösser als die grösste Ordinate v sein muss. Wir beschreiben um beliebig viel Punkte der Geschwindigkeitscurve, am zweckmässigsten um die mittelst Zirkelstichen zwischen den Parallelen markirten Punkte, Kreise, welche die Bahn des Punktes M in ebensoviel Punkten schneiden. Die Verbindung der correspondirenden Punkte liefert ein System von Strahlen, von denen jeder die Richtung des bezüglichen Bogenelementes der Zeitcurve giebt.

Wir legen nun zweckmässig der Reihe nach an jeden solchen

Strahl KG ein Lineal, siehe Fig. 4, Taf. I, und an dasselbe die Kante eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Seiten in der Figur anschraffirt sind. Als Anfangspunkt der Zeitcurve wählen wir den Punkt a senkrecht über dem Nullpunkt in beliebiger Höhe. Nun verschieben wir das Dreieck, bis die zum Lineal senkrechte Kante durch a geht, und markiren mit einer Punktirnadel den Schnittpunkt der Kante des Dreiecks mit der dem Punkte K zunächst liegenden Parallele.

Sehr angenähert ist dann die kleine Strecke ae das Bogenelement der gesuchten Zeitcurve.

Darauf legen wir an den nächsten Strahl $K_1 G_1$ das Lineal, verschieben längs desselben das Dreieck, bis dessen Kante durch den Punkt e geht und markiren auf der nächsten Parallele den Schnittpunkt o. Die Strecke eo ist das zweite Bogenelement der Zeitcurve.

Es ist bei der Construction stets zu beachten, dass das Bogenelement zwischen die Parallelen eingepasst wird, zwischen welchen der Endpunkt der bezüglichen Strecke u auf der Geschwindigkeitscurve sich befindet.

Am zweckmässigsten bedient man sich auch hier des vorhin erwähnten Ordinatenpapiers.*)

Was nun die Rectification der Zeitcurve anbelangt und die Abweichung derselben von ihrem wahren Verlauf, so könnte man einwenden, dass der Quotient $\frac{\sigma}{u} = t$ sehr ungenau ausfallen müsste, weil die Zeitcurve durch mechanisches Aneinandersetzen ihrer Bogenelemente entstanden sei.

Im Allgemeinen ist dies aber nicht der Fall und die Genauigkeit eine verhältnissmässig grosse. Es soll dies späterhin nachgewiesen werden.

Wohl ist aber, wie bei der Geschwindigkeitscurve, eine bedeutendere Fehlerquelle vorhanden, wenn v von Null an wächst, da das zwischen die beiden ersten Parallelen construirte Bogenelement

---

*) Fig. 4 zeigt die Construction der Zeitcurve in grösserem Massstabe. Alle in den Tafeln enthaltenen Constructionen sind zuvor auf dem erwähnten Ordinatenpapier ausgeführt, wonach die Entfernung der Parallelen von zwei aufeinanderfolgenden Punkten, nicht wie in Fig. 4, Taf. I, fünf, sondern zwei Millimeter beträgt.

dieselben unter sehr spitzem Winkel schneidet. Da allein die Bogenlänge der Zeitcurve massgebend ist, so ist eine genaue Markirung der Endpunkte der einzelnen Bogenelemente nothwendig. Wie dieser Uebelstand zu beseitigen ist, soll in einem späteren Abschnitte eingehend untersucht werden.

Auch hier finden wir die mittlere Geschwindigkeit leicht auf folgende Weise.

Wenn die Geschwindigkeitscurve $v = \varphi(x)$ eine Gerade ist, welche der Abscisse parallel geht, so erhalten wir als Zeitcurve ebenfalls eine Gerade, denn sämmtliche Strecken u sind einander parallel.

Bezeichnen wir die mittlere Geschwindigkeit mit v_m, so ist

$$t = \frac{x}{v_m}.$$

Nun ist aber $t = \frac{\sigma}{u}$, also

$$v_m = \frac{xu}{\sigma}.$$

Die Länge σ erhalten wir durch Rectification der Zeitcurve; nehmen wir dieselbe in den Zirkel und passen sie zwischen die beiden äussersten Ordinaten ein, welche zum Wege x gehören, so haben wir nur nöthig, auf ihr u als Loth zu errichten. Die verticale Projection von u ist die mittlere Geschwindigkeit v_m.

b) die Darstellung der Zeit als lineare Grösse können wir auch in der Weise vornehmen, dass wir eine Curve construiren, deren Abscisse x und deren Ordinate t ist.

Die Differentialgleichung derselben ist

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Der Ausdruck links ist die Tangente des Winkels, welchen das Bogenelement der Curve mit der Y-Axe einschliesst.

Wir setzen demgemäss $tg\,\tau = \frac{dx}{dt}$, die Curve wird principiell durch Umhüllung ihrer Tangenten dargestellt werden müssen.

Construction der Curve $t = f(x)$.

Wir theilen die Abscisse in eine grössere Anzahl Theile und ziehen durch die Theilpunkte Verticalen. Die Schnittpunkte m

derselben mit der Geschwindigkeitscurve projiciren wir auf die Y-Axe (siehe Fig. 5, Taf. I).

Verbinden wir diese projicirten Punkte mit einem auf der X-Axe im Abstande 1 vom Nullpunkte O gelegenen Punkte P, so ist in jedem Dreieck die Tangente des Winkels bei P beziehungsweise $tg\,\tau = \frac{v}{1}$. Andererseits, wenn wir von diesem um 90^0 gedrehten Strahlenbüschel nach den Regeln der Graphostatik als Kräftepolygon das Seilpolygon bilden, und die Ordinaten der von diesem umhüllten Curve t und x nennen, ist $\frac{dx}{dt} = tg\,\tau$, also auch

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

d. h. die trig. Tangenten der Winkel, welche die geom. Tangenten mit der X-Axe bilden, sind proportional v, und es stellen die Ordinaten der umhüllten Curve in der That die Zeit dar.

Diese Methode, die Zeit graphisch zu bestimmen, steht indess derjenigen unter a) erläuterten bedeutend nach, sowohl was die Genauigkeit der Resultate, als die Handlichkeit im Gebrauch betrifft. Es sind hier noch mehrere Zwischenconstructionen nothwendig, die wir unter a) nicht nöthig hatten, als Projiciren der einzelnen Punkte der Geschwindigkeitscurve auf die Y-Axe, Construction des Strahlenbüschels in P und Drehung desselben um 90^0. Aus diesem Grunde werden auch die Fehler viel bedeutender ausfallen, als bei der Methode a). Es erscheint somit gerechtfertigt, wenn wir in der Folge von dieser allein Gebrauch machen und unter dem Namen Zeitcurve stets diejenige Curve meinen, auf welcher der Hilfspunkt μ mit constanter Geschwindigkeit läuft, d. h. deren Bogenlänge proportional der Zeit ist.

§. 9. In Folge des geometrischen Zusammenhanges der drei Curven: der Beschleunigungscurve, Geschwindigkeitscurve und Zeitcurve sind wir nunmehr im Stande, folgende Aufgabe zu lösen.

Aufgabe. Es sind durch Beobachtungen die Stellen des Punktes M in seiner Bahn bestimmt, welche derselbe in gleichen Zeiten passirt. Die Bewegung des Punktes ist eine stetige.

Nach welchem Geschwindigkeitsgesetz bewegt sich der Punkt M?

Wir ziehen zunächst, Fig. 6, Taf. I, durch sämmtliche auf der Abscisse gegebenen Punkte Ordinaten, nehmen behufs Construction der Zeitcurve eine beliebige Strecke $\triangle\sigma$ aber grösser als die grösste Distanz der gegebenen Punkte in den Zirkel und passen dieselbe zwischen die parallelen Ordinaten ein. Diese Endpunkte der eingepassten Strecken, welche also senkrecht über den auf der Abscisse gegebenen sind und von einander gleiche Abstände haben, geben miteinander verbunden die Zeitcurve. Nun legen wir nacheinander an jede eingepasste Strecke ein Lineal und errichten mittelst eines Dreiecks in der Mitte derselben F ein Loth FE. Da die Zeit $\triangle t$, in welcher der Punkt M die Wegstrecke $\triangle x$ auf der Abscisse, beziehungsweise der Hilfspunkt den Bogen $\triangle\sigma$ der Zeitcurve zurücklegt, gegeben ist, so ist $u = \frac{\triangle\sigma}{\triangle t}$ bekannt. Diese Länge nehmen wir in den Zirkel und stecken dieselbe auf der construirten Normalen zur Zeitcurve von deren Fusspunkte E ab, so dass $EG = u$ ist. Die Horizontale durch G schneidet die Ordinate des Punktes F in B. B ist ein Punkt der Geschwindigkeitscurve, denn wird durch B eine Parallele zu FE gezogen, so ist im $\triangle MBD$

$$BM = u \cos \tau,$$
$$\text{also } BM = v.$$

Die Subnormalen der in dieser Weise construirten Geschwindigkeitscurve geben nun, um 90^0 gedreht, die Beschleunigungscurve.

In der Fig. 6, Taf. I, ist die Bahnstrecke $OA = 52^{mm}$. Die Anzahl der beobachteten Stellen der Bahn, welche der Punkt in der Zeit $\triangle t = \frac{1}{4}$ Secunde passirt, beträgt 14. Zur Construction der Zeitcurve ist $\triangle\sigma = 5^{mm}$ gewählt, somit folgt

$$u = \frac{5}{\frac{1}{4}} = 20^{mm}.$$

Mit dieser Grösse ist nun in der angegebenen Weise die

Geschwindigkeitscurve construirt und erhalten wir für die Anfangs- resp. Endgeschwindigkeit die Werthe

$$v_0 = 6{,}7^{mm} \text{ und } v = 20{,}1^{mm} \text{ pro Secunde.}$$

Die in der bewegten Masse M aufgesammelte lebendige Kraft, wenn dieselbe in A ankommt, beträgt also

$$\frac{M}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{M}{2} \,.\, 3{,}5912 = 179{,}56\ M.$$

Die von der Beschleunigungscurve über dem Wege OA eingeschlossene Fläche F enthält 182^{qmm}. Da nun

$$FM = \frac{M}{2}(v^2 - v_0^2) = 179{,}56\, M$$

ist, so müsste der Werth von F durch Quadratur sich zu 179,56 statt 182 ergeben. Die Abweichung beider Werthe ist in der Ungenauigkeit der Construction zu suchen. Sie ist auch hier sehr klein, denn der Fehler beträgt nur 1,36 Proc.

C) Reduction der Constructionsgrössen.

§. 10. In den Aufgaben, welche die Praxis stellt und welche man mit Hilfe der bis jetzt erläuterten Methoden zeichnerisch lösen kann, stehen die gegebenen und als Linien in die Construction einzuführenden Grössen oft in einem für die constructive Behandlung der Aufgaben so ungünstigen Verhältniss, dass man, um überhaupt die Zeichnung auf einem beschränkteren Raum ausführen zu können, sich genöthigt sieht, ein oder die andere gegebene Grösse in verkleinertem oder vergrössertem Massstabe aufzutragen. Wenn man nun mit diesen in verschiedenen Massstäben gemessenen Grössen operirt, so erhält man offenbar Resultate, die nicht die wahren sind. Um letztere zu erhalten, muss man erstere mit gewissen Coefficienten multipliciren, die abhängig sind von dem Verhältniss, in welchem die eingeführten Massstäbe zu einander stehen. Im Folgenden sollen diese Coefficienten bestimmt werden.

1) **Aufgabe.** Es ist die Geschwindigkeitscurve gegeben und sind deren Ordinaten in einem andern Massstabe aufgetragen als die Abscissen. Es soll der Coefficient bestimmt werden, mit dem man die durch die Con-

struction gefundene Zeitgrösse zu multipliciren hat, um die wirklich verflossene Zeit zu finden.

Wir wählen zunächst irgend eine passende Masseinheit γ, in der wir die Geschwindigkeit v auftragen, so dass $v' = \gamma v$ ist, ferner eine Masseinheit β, in welcher wir den Weg x auftragen $x' = \beta x$.

Sämmtliche reducirten Grössen bezeichnen wir hier, wie in der Folge, mit einem Strich oben, alle wahren Grössen ohne denselben.

Zwischen den reducirten Grössen x' und v' besteht die Beziehung

$$dt' = \frac{dx'}{v'}$$

zwischen den wahren x und v

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{\gamma dx'}{\beta v'},$$

mithin folgt durch Division

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{\beta}{\gamma},$$

und durch Integration

$$\frac{t'}{t} = \frac{\beta}{\gamma} \text{ oder } t = \frac{\gamma}{\beta} t'.$$

$\frac{\gamma}{\beta}$ ist demnach der gesuchte Coefficient.

2) **Aufgabe.** Es sind die Ordinaten der Beschleunigungscurve in einem anderen Massstabe gemessen, als die Abscissen. Es soll die wahre Zeit t und die wahre Geschwindigkeit v ermittelt werden.

a) Die Geschwindigkeitscurve steige von Null auf.

Wir wählen einen passenden Massstab, in welchem wir den Weg auftragen $x' = \beta x$. Für die Ordinaten p' der Beschleunigungscurve wählen wir einen andern Massstab (α), so dass

$$p' = \alpha p \text{ ist.}$$

Die zum Wege x' durch Construction erhaltene Geschwindigkeitsordinate sei v', während die wahre v sei. Dieselbe erhalten wir, wenn wir v' mit einem gewissen Coefficienten γ multipliciren.

Zur Ermittelung desselben gehen wir von der Gleichung der lebendigen Kräfte aus.

Für die Constructionsgrössen haben wir die Beziehung

$$\frac{v'^2}{2} = \int p' dx' = \alpha\beta \int p dx,$$

für die wahren Grössen die Beziehung

$$\frac{v^2}{2} = \int p dx, \text{ somit ist}$$

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\alpha\beta} = \gamma.$$

Diesen Werth für γ in die unter 1) erhaltene Gleichung

$$\frac{t'}{t} = \frac{\beta}{\gamma} \text{ eingesetzt, giebt}$$

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \text{ also } t = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\, t'.$$

b) Die Geschwindigkeitscurve steige von dem gegebenen Anfangswerthe v_0 auf.

Für die Constructionsgrössen haben wir die Gleichung

$$v'^2 - v_0'^2 = 2 \int p' dx' = 2\alpha\beta \int p dx,$$

für die wahren Grössen die Gleichung

$$v^2 - v_0^2 = 2 \int p dx.$$

Durch Division folgt

$$\frac{v'^2 - v'_0{}^2}{v^2 - v_0^2} = \alpha\beta,$$

und hieraus

$$v^2 = \frac{v'^2 - v'_0{}^2}{\alpha\beta} + \frac{v_0'^2}{\gamma^2}.$$

Wählen wir auch hier die Massstäbe α, β, γ nicht unabhängig von einander, sondern so, dass die Beziehung $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$ besteht, so fällt, wenn wir diesen Werth in die Gleichung einsetzen, die reducirte Anfangsgeschwindigkeit v_0' heraus und es folgt, wie unter a)

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\alpha\beta} = \gamma$$

und weiter

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Wir erhalten dieselben Coefficienten, wie in Fall a).

§. 11. **Beispiel.** Es sei die Beschleunigungscurve (Fig. 7) eine gerade Linie, deren Anfangsordinate $p_0 = 200^{mm}$ gegeben ist. Sie schneide die Abscisse in einer Entfernung $x = 600^{mm}$ vom Anfangspunkte. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 400^{mm}$ pro Secunde. Die Endgeschwindigkeit v, sowie die verflossene Zeit t soll ermittelt werden, wenn die Construction mit den Längen

$$p_0' = 10^{mm},\; x' = 40^{mm}$$

ausgeführt wird. Die Massstäbe sind demnach

$$\frac{p_0'}{p_0} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} = \alpha,$$

$$\frac{x_0'}{x_0} = \frac{40}{600} = \frac{1}{15} = \beta,$$

demnach haben wir

$$\frac{v_0'}{v} = \gamma = \sqrt{\alpha\beta} = 0{,}0575$$

zu setzen. Hieraus folgt

$$v_0' = 0{,}0575 \,.\, 400 = 23^{mm}.$$

Construiren wir nun mit diesen Grössen p_0', x' und v_0' die Geschwindigkeitscurve und Zeitcurve, wie dies in Fig. 7 geschehen ist, so finden wir die Länge der über dem Wege $OB = 40^{mm}$ befindlichen Zeitcurve AE, $\sigma' = 49{,}8^{mm}$; die Geschwindigkeitsstrecke $u' = FG$ ist beliebig angenommen und zwar $u' = 34^{mm}$, also folgt

$$t' = \frac{\sigma'}{u'} = \frac{49{,}8}{34} = 1{,}465 \text{ Sec.}$$

Die wahre Zeit ist demnach

$$t = \frac{\gamma}{\beta}\, t' = 0{,}8655 \,.\, 1{,}465\, t = 1{,}268 \text{ Sec.}$$

Im vorliegenden Falle lässt sich mit der unter 2) im Abschnitte E) gegebenen Formel für t die Zeit rechnerisch bestimmen und wir erhalten den genauen Werth $t = 1{,}23$ Sec., der Fehler beträgt also $\frac{3{,}8}{123}$ rund 3 Proc.

Die Endgeschwindigkeit ist nach der Zeichnung $v' = 30^{mm}$, mithin

$$v = \frac{v'}{\gamma} = \frac{30}{0{,}0577} = 520^{mm} \text{ pro Sec.}$$

Aus der Gleichung $v^2 - v_0{}^2 = xp_0$ folgt der wahre Werth $v = 529$. Es ist also der Fehler $= \frac{9}{529} = 1{,}7$ Proc.

Mit Bezug auf die Kleinheit der Constructionszeichnung erscheinen die Fehler sehr gering.

D) Graphische Bestimmung des Antriebes der Kraft, der Bewegungsgrösse und der Arbeitsstärke.

§. 12. Wenn die bewegende Kraft P als Function der Zeit t gegeben ist und die innerhalb der Zeit $t - t_0$ erfolgte Geschwindigkeitsvermehrung der Masse M, $v - v_0$ beträgt, so besteht bekanntlich die Beziehung:

$$\int_{t_0}^{t} P dt = Mv - Mv_0.$$

Man nennt Mv die Bewegungsgrösse und das Integral

$$\int_{t_0}^{t} P dt$$

den Antrieb der Kraft und spricht diese Beziehung in dem bekannten Satze aus:

Der Antrieb der Kraft während irgend eines Zeitintervalles ist gleich der Aenderung, welche die Bewegungsgrösse während dieser Zeit erleidet.

Um diesen Satz bei unsern graphischen Methoden zu verwerthen, dividiren wir die Gleichung durch M und erhalten, da $\frac{P}{M} = p$ ist,

$$\int_{t_0}^{t} p dt = v - v_0.$$

Da $v - v_0$ der Zeichnung ohne Weiteres zu entnehmen ist, so haben wir auch graphisch den Antrieb der Kraft pro Masseneinheit bestimmt.

Es ist interessant, die Beziehung festzustellen, welche zwischen dem Antriebe der Kraft und der Zeitcurve existirt.

Ist wie früher $d\sigma$ das Bogenelement der Zeitcurve, u die constante Geschwindigkeit des Hilfspunktes μ, so ist

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt = \frac{1}{u}\int_{\sigma_0}^{\sigma} p\,d\sigma.$$

Jeder Lage des Hilfspunktes μ entspricht eine Ordinate p der Beschleunigungscurve. Rectificiren wir die Zeitcurve und tragen p als Ordinate in dem betreffenden Fusspunkte auf, so ist die von der Curve $p = f(\sigma)$ eingeschlossene Fläche gleich dem Antrieb der Kraft. In dem speciellen Falle, dass p constant ist, folgt

$$\frac{p}{u}(\sigma - \sigma_0) = (v - v_0)$$

und giebt diese Beziehung eine interessante Controle für die Genauigkeit, mit welcher die Zeitcurve und Geschwindigkeitscurve construirt ist.

Die zwischen den Ordinaten v_0 und v, resp. den Abscissen x_0 und x von der Beschleunigungscurve eingeschlossene Fläche F multiplicirt mit der Masse des bewegten Punktes, giebt die auf dem Wege $x - x_0$ verrichtete Arbeitsgrösse A, da $A = MF$ ist.

Je nach der Zeit, in welcher diese Arbeitsgrösse verrichtet wird, hat man es mit einer bestimmten Arbeitsstärke*) L zu thun. Man erhält L, wenn man A durch die Zeit t dividirt, so dass $L = \frac{A}{t}$ ist.

Den Werth t finden wir durch Construction der Zeitcurve mittelst der Beziehung

$$t = \frac{\sigma}{u}.$$

Diesen Werth eingesetzt, giebt

$$L = \frac{Au}{\sigma}.$$

Der Werth A ist als Fläche nicht gut der Zeichnung zu entnehmen. Statt seiner führen wir den Werth

$$\frac{M}{2}(v^2 - v_0^2)$$

ein, wo dies hinsichtlich v und v_0 der Fall ist und erhalten

$$L = \frac{M}{2}(v^2 - v_0^2)\frac{u}{\sigma}.$$

*) Eine recht brauchbare Bezeichnung, welche von Reuleaux herrührt.

E) Anwendung der gegebenen Constructionsmethoden auf specielle Beispiele.

1) Problem des freien Falles:

§. 13. Ein Körper, welcher nur der Schwere unterworfen ist, falle von einer bestimmten Höhe durch den leeren Raum. Fig. 8, Taf. I.

Es ist die die Masseneinheit beschleunigende Kraft $p = g$ (Beschleunigung der Schwere). Stecken wir dieselbe als Ordinate OB von der Verticalen, durch welche der Körper fällt, horizontal ab, so erhalten wir als Beschleunigungscurve eine gerade Linie BN, welche vertical abwärts geht. Als Geschwindigkeitscurve erhalten wir eine Parabel, welche die besondere Eigenschaft besitzt, dass ihre (bekanntlich constante) Subnormale $= g$ ist.

Die Gleichung für die Ansammlung von lebendiger Kraft, wenn M die Höhe $OC = x$ durchfallen hat, ist $v^2 = 2gx$ gleichzeitig die Gleichung der Parabel. Hinsichtlich der Bestimmung der Zeit fungirt die Scheiteltangente als Zeitcurve, wenn wir M zunächst horizontal auf die Geschwindigkeitsparabel nach m und m vertical auf die Scheiteltangente nach μ projiciren.

Dieser Hilfspunkt μ bewegt sich auf der Scheiteltangente mit constanter Geschwindigkeit.

Dies folgt aus der Differentialgleichung

$$g = \frac{dv}{dt},$$

$$dt = \frac{dv}{g}, \quad t = \frac{v}{g},$$

wenn für $v = o$ auch $t = o$ ist, d. h.: Die Zeit ist proportional der Geschwindigkeit. Nehmen wir daher die Strecke g in den Zirkel und stecken diese Länge hintereinander vom Anfangspunkte der Bewegung auf der Scheiteltangente (oder irgend einer ihr Parallelen) ab und ziehen durch die erhaltenen Theilpunkte 1, 2, 3 .... Verticalen, so schneiden dieselben die Geschwindigkeitscurve in bestimmten Punkten m. Die Projection derselben auf die verticale Falllinie giebt die Stellen, welche der fallende Punkt nach gleichen Zeiträumen passirt.

2) **Einfache harmonische Bewegung:**

§. 14. Ein Punkt hat eine einfache harmonische Bewegung, wenn die Beschleunigungscurve eine gerade Linie ist, welche, von einer messbaren Ordinate p_0 beginnend, die Abscisse schneidet. (Fig. 9.) Von diesem Schnittpunkte, der der Mittelpunkt der Bewegung heisst, ist die beschleunigende resp. verzögernde Kraft proportional der Entfernung. Diesem einfachen Beschleunigungsgesetz unterliegen z. B. die Punkte vibrirender Stäbe, die Luft und Aetheratome, durch deren Schwingungen Ton und Licht erzeugt wird.

Wir wollen nun untersuchen, welche Resultate unsere graphischen Methoden für diese in der Physik äusserst wichtige Bewegung eines materiellen Punktes liefert.

In den Schwingungsproblemen ist die Bewegung des Punktes M eine periodisch wiederkehrende, d. h. wenn der Punkt A unter dem Einflusse der von A nach O stetig abnehmenden beschleunigenden Kraft im Mittelpunkte O angelangt ist, so bewegt er sich von O an unter dem Einfluss einer stetig zunehmenden verzögernden Kraft mit abnehmender Geschwindigkeit, bis er wieder in A_1 zur Ruhe gelangt. Es ist die Strecke $AO = OA_1$. Nun bewegt sich der Punkt von A_1 im entgegengesetzten Sinne ganz in derselben Weise, indem die beschleunigende Kraft ihren Sinn wechselt. Demgemäss ist für die Bewegung die punktirte Gerade als Beschleunigungscurve massgebend.

Beginnen wir nun von A an die Construction der Geschwindigkeitscurve, so erhalten wir eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Bewegung zusammenfällt. Die Ellipse hat die Eigenschaft, dass ihre Subnormalen proportional der Entfernung von O wachsen.

Die Gleichung der Ellipse ergiebt sich folgendermassen.

Rezeichne x die Abscisse des Punktes M, gemessen vom Mittelpunkte O der Bewegung, p die Ordinate der Beschleunigungsgeraden, a die grösste Entfernung, bis zu welcher sich der Punkt bewegt, und p_0 die zum Abstand a gehörige Ordinate, so folgt zunächst die Proportion

$$\frac{p}{x} = \frac{p_0}{a}.$$

Nun ist $p = -\frac{v\,dv}{dx}$. Es muss das negative Vorzeichen gesetzt werden, weil die treibende Kraft verzögernd wirkt.

Für p den Werth $p = \frac{x\,p_0}{a}$ eingesetzt, giebt

$$\frac{p_0}{a}\,x\,dx = -\,v\,dv.$$

Integrirt

$$\frac{p_0}{a}\,\frac{x^2}{2} = -\,\frac{v^2}{2} + C,$$

für $x = o$ sei $v = b$, also ist $C = \frac{b^2}{2}$, somit

$$\frac{p_0 x^2}{a} + v^2 = b^2$$

und durch b^2 dividirt

$$\frac{x^2 \cdot p_0}{ab^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

Wenn der Punkt M von A nach O gelangt ist, so ist in ihn eine Arbeit $= \frac{p_0 a}{2}$ hineingetragen. Die lebendige Kraft, welche er in O besitzt, ist $\frac{b^2}{2}$, somit muss $\frac{b^2}{2} = \frac{p_0 a}{2}$ sein, also $\frac{b^2 a}{p_0} = a^2$. Dieser Werth oben eingeführt, giebt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

die Mittelpunktsgleichung der Ellipse.

Aus der Beziehung $p_0 = \frac{b^2}{a}$ folgt, dass die Anfangsordinate p_0 der Beschleunigungsgeraden der halbe Parameter der Ellipse ist.

Da derselbe gleich dem im Brennpunkt errichteten Loth ist, so kann diese Beziehung zur Construction der Beschleunigungsgeraden verwandt werden, wenn die Ellipse gegeben ist.

Was die Construction der Zeitcurve anbelangt, so können wir für dieselbe je nach der Wahl von u verschiedene von A aufsteigende Curven erhalten.

Es lässt sich nachweisen, dass, wenn wir die Geschwindigkeit $u = b$ wählen, also gleich der grössten Bahngeschwindigkeit des Punktes M, die Zeitcurve ein

Kreis ist, welcher mit der halben grossen Axe der Ellipse um deren Mittelpunkt beschrieben ist.

Zum Beweise hierfür nehmen wir an, Punkt M befinde sich an irgend einer Stelle seiner Bahn, Fig. 9, Taf. I. Die Verticale durch M schneide die Ellipse in B und den Kreis in μ. Verbinden wir μO und ziehen hierzu eine Parallele BE, so ist zu beweisen, dass, wo sich auch M befinden mag, stets $BE = b$, also auch $= u$ ist.

Bezeichnen wir die Ordinate von μ mit y, so verhält sich

$$\frac{BE}{a} = \frac{v}{y}.$$

Nun besteht aber bekanntlich zwischen den Ordinaten des Kreises und der Ellipse die Beziehung

$$\frac{v}{y} = \frac{b}{a}, \text{ also}$$

ist $BE = b$, was zu beweisen war. Während also M seine gesetzmässige Bewegung ausführt, durchläuft der Hilfspunkt μ mit der constanten Geschwindigkeit $u = b$ den Kreis.

Nennen wir φ den Winkel $A_1 O \mu$, ferner σ den Bogen $A_1 \mu$, so ist die während der Bewegung des Punktes von A_1 nach M verflossene Zeit t

$$t = \frac{\sigma}{u} = \frac{a\varphi}{b},$$

also die während einer vollen Amplitude (d. h. während der Bewegung des Punktes M von A durch O nach A_1 und von A_1 wieder durch O zurück nach A) verflossene Zeit

$$T = \frac{2a\pi}{b}.$$

Nennen wir den Winkel, welchen die Beschleunigungsgerade mit der Abscisse bildet, α, so ist

$$tg\,\alpha = \frac{p_0}{a}, \text{ da nun } \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a}{p_0}}$$

ist, so folgt

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{tg\,\alpha}}.$$

Hieraus folgt, dass für ein und dasselbe Beschleunigungsgesetz gegeben durch den Winkel α die Zeit unabhängig von

der Amplitude ist und verschiedene Ausweichungen in derselben Zeit durchlaufen werden. Wir werden von dieser interessanten Eigenschaft der harmonischen Bewegung für die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Cycloide späterhin Anwendung machen.

§. 15. Es existirt noch eine

dritte einfache Bewegung, für welche das Geschwindigkeitsgesetz durch eine Hyperbel, im speciellen Falle durch eine gerade Linie, darstellbar ist.

Wir werden auf dieselbe geführt, wenn die vom Anfangspunkte der Bewegung wachsenden Ordinaten der Beschleunigungsgeraden, nicht wie bei der harmonischen Bewegung verzögernde, sondern beschleunigende Kräfte darstellen.

Die Geschwindigkeitscurve ist eine Hyperbel, welche für den Fall, dass keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, von dem Fusspunkte M_0 der Anfangsordinate p_0 aufsteigt, vergl. Fig. 11, Taf. I.

Beginnt die Bewegung des Punktes von dem Schnittpunkte der Beschleunigungsgeraden mit der Abscisse, so geht die Hyperbel über in ihre Asymptote und diese ist dann die Geschwindigkeitscurve.

Um zuerst das letztere nachzuweisen, ziehen wir Fig. 10, Taf. I, zwei beliebige Verticalen, welche die von O beginnende Beschleunigungsgerade in D und D_1 schneiden. Die Schnittpunkte auf der Abscisse M und M_1 haben von O die Abstände x und x_1.

Zunächst haben wir die Proportion

$$\frac{p}{p_1} = \frac{x}{x_1}.$$

Die lebendige Kraft des bewegten Punktes in M ist

$$\left.\begin{aligned} &\frac{v^2}{2} = \frac{x \cdot p}{2} \\ \text{in } M_1 \quad &\frac{v_1^2}{2} = \frac{x_1 p_1}{2} \end{aligned}\right\} \text{durch Division folgt}$$

$$\frac{v^2}{v_1^2} = \frac{x}{x_1} \cdot \frac{p}{p_1} = \frac{x^2}{x_1^2},$$

$$\text{also } \frac{v}{v_1} = \frac{x}{x_1},$$

mithin ist bewiesen, dass die Geschwindigkeitscurve eine von O ansteigende Gerade ist.

Zur Construction derselben haben wir die letzte Beschleunigungsordinate um ihren Fusspunkt zu drehen, so dass deren Endpunkt D_1 nach E_1 gelangt. Halbiren wir die Strecke OE_1 in H und beschreiben um H einen Kreis, der durch O und E_1 geht, so bestimmt derselbe auf der Verlängerung von p_1 die zugehörige Geschwindigkeitsordinate $B_1 M_1$ und OB_1 ist die Geschwindigkeitsgerade; denn weil der Winkel $OB_1 E_1$ ein Rechter ist, ist die Subnormale in der That die Ordinate p_1.

Was nun die Construction der Zeitcurve für diesen Fall anbelangt, so lässt sich keine Curve auffinden, welche leicht zu verzeichnen wäre und in einer ebenso fasslichen Beziehung stände, als der Kreis bei der einfachen harmonischen Bewegung und die Scheiteltangente bei der Bewegung des freien Falles. Es bleibt hier nichts anderes übrig, als nach der allgemeinen Methode mit irgend einer beliebig gewählten Geschwindigkeitsstrecke u die Zeitcurve zu construiren.

Rechnerisch lässt sich dagegen die nach einem bestimmten Wege x verflossene Zeit sehr leicht wie folgt bestimmen.

Wir gehen von der Gleichung

$$v = \frac{dx}{dt}$$

aus, woraus

$$dt = \frac{dx}{v}$$

folgt.

Es sei der Winkel, welchen die Geschwindigkeitsgerade mit der Abscisse bildet β. Dann folgt

$$v = x \, tg \beta,$$

also

$$dt = \frac{1}{tg \beta} \frac{dx}{x},$$

und von o bis x integrirt giebt die Zeit

$$t = \frac{ln . x}{tg \beta},$$

d. h. die Zeit ist proportional dem Logarithmus des Weges.

Gehen wir zum allgemeineren Fall über, dass im Anfangs-

punkte der Bewegung bereits eine messbare Beschleunigung p_0 vorhanden ist, so lässt sich der Beweis für die Existenz einer *Hyperbel als Geschwindigkeitscurve*, wie folgt, führen (siehe Fig. 11).

Verlängern wir die Beschleunigungsgerade, bis dieselbe die Abscisse in O schneidet und bezeichnen den Abstand OM_0 mit a, den Abstand OM mit x, die Ordinate $M_0 D_0$ resp. MD mit p_0 und p und den Neigungswinkel der Beschleunigungsgeraden gegen die Abscisse mit α, so liefert das Princip der lebendigen Kraft die Gleichung

$$\frac{v^2}{2} = (x - a)\,\frac{(p + p_0)}{2}.$$

Nun ist $\left.\begin{aligned} p &= x\,tg\,\alpha \\ p_0 &= a\,tg\,\alpha \end{aligned}\right\}$ also $v^2 = (x^2 - a^2)\,tg\,\alpha$,

oder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{v^2}{a^2\,tg\,\alpha} = 1.$$

Nennen wir die Ordinate der Asymptote in M_0, b, so folgt, wenn die Bewegung statt von M_0 von O begonnen hätte,

$$p_0\,a = b^2.$$

Es darf wohl kaum bewiesen werden, dass die Asymptote der Hyperbel eben die für den speciellen Fall auftretende Geschwindigkeitsgerade ist.

Nun ist aber $p_0 = a\,tg\,\alpha$, also

$$a^2\,tg\,\alpha = p_0\,a = b^2,$$

dies eingesetzt giebt

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{v^2}{b^2} = 1$$

die *Mittelpunktsgleichung der Hyperbel*.

Auch hier ist die Zeitcurve, wie man auch die Geschwindigkeit u wählen mag, nicht einfach zu verzeichnen. Die Construction muss nach der allgemeinen Methode vorgenommen werden.

Rechnerisch bestimmt sich die Zeit folgendermassen:

Aus der Gleichung der Hyperbel folgt

$$v = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

dies in die Gleichung $dt = \frac{dx}{v}$ eingesetzt, giebt

$$dt = \frac{a}{b} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

$$\text{also } t = \frac{a}{b} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

$$t = \frac{a}{b}\, ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right),$$

oder die Wurzel wieder durch v ausgedrückt

$$t = \frac{a}{b}\, ln \left(\frac{x}{a} + \frac{v}{b} \right).$$

Mittelst dieser Gleichung kann man ohne grosse Mühe rechnerisch t ermitteln.

Der Werth t lässt sich aber auch geometrisch, wie folgt, darstellen:

Es ist bekanntlich der Inhalt der Hyperbelfläche

$$M_0 F M = \frac{xv}{2} - \frac{ab}{2}\, ln \left(\frac{x}{a} + \frac{v}{b} \right).$$

Ziehen wir vom Mittelpunkte der Hyperbel nach dem Endpunkte der Geschwindigkeit einen Strahl OF, so schliesst derselbe zwischen a und dem Hyperbelbogen $M_0 F$ eine in Fig. 11 schraffirte Fläche ein, deren Inhalt F sei.

Nun ist

$$F = \frac{xv}{2} - M_0 F M,$$

also

$$F = \frac{ab}{2}\, ln \left(\frac{x}{a} + \frac{v}{b} \right).$$

Ferner ist, wie eben gezeigt:

$$ln \left(\frac{x}{a} + \frac{v}{b} \right) = \frac{b}{a}\, t,$$

also auch

$$F = \frac{b^2}{2}\, t,$$

$$t = \frac{2F}{b^2},$$

d. h. die Zeit ist proportional der von dem Fahrstrahl OF bestrichenen Fläche,

oder mit andern Worten: Der von dem entsprechenden Punkte m (stets vertical über M gelegen) nach dem Mittelpunkte der Hyperbel gezogene Fahrstrahl bestreicht in gleichen Zeiträumen gleiche Flächen.

Wäre also m ein auf der Hyperbel frei beweglicher Punkt, so würde die Bewegung desselben zu erklären sein durch den Einfluss einer beschleunigenden Centralkraft, die stets durch den Mittelpunkt geht. Dies Analogon giebt das Princip der Flächen, auf welches wir später bei den Centralkräften näher eingehen werden.

4) Problem des Zusammentreffens zweier Körper.

§. 16. Die Construction der Zeitcurve entspricht der Berechnung der Zeit t in der analytischen Dynamik. Sind mehrere geradlinige Bewegungen gegeben und erheischt die rechnerische Lösung der Aufgabe eine Elimination der Zeit, so entspricht dieses in der zeichnerischen Lösung dem Abgreifen gleichlanger Bogenstrecken verschiedener Zeitcurven. Da nun diese Operation mit hinlänglicher Genauigkeit vorgenommen werden kann, so kann man eine gewisse Klasse von Aufgaben zeichnerisch lösen; in vielen Fällen wird dieses sogar der einzige zu numerischen Resultaten führende Weg sein, da die rechnerische Durchführung, wenn nicht unmöglich, so doch sehr schwierig ist.

Es sollen im Folgenden einige Aufgaben der gedachten Art behandelt werden.

Aufgabe. Gegeben sind zwei Körper von den Massen M und M_1, die sich in gerader Bahn gegen einander bewegen, und das Gesetz der die Masseneinheiten beschleunigenden Kräfte.

Beide Körper beginnen ihre Bewegung gleichzeitig von den bezüglichen Anfangspunkten O und O_1 aus. Es soll der Ort bestimmt werden, an welchem die beiden Körper zusammentreffen.

Wir verzeichnen, Fig. 12, Taf. II, zunächst aus den gegebenen Beschleunigungscurven die Geschwindigkeitscurven $v = \varphi(x)$

und $v_1 = \varphi_1(x_1)$, ferner die beiden Zeitcurven mit derselben Geschwindigkeitsstrecke u.

Dies hat zur Folge, dass die Hilfspunkte μ und μ_1 mit derselben constanten Geschwindigkeit μ sich auf ihren Zeitcurven bewegen, also auch in gleichen Zeiten gleiche Bögen zurücklegen.

In dem Augenblicke, wo die beiden Punkte μ und μ_1 sich in einer Senkrechten zur Bahn befinden, trifft offenbar M und M_1 zusammen.

Zur Ermittelung dieser Stelle theilen wir zweckmässig beide Zeitcurven in eine Anzahl gleicher Theile (von solcher Kleinheit, dass die Bogenstrecken als gerade angesehen werden können) und numeriren die Theilpunkte. Auf jeder Zeitcurve sind die um gleiche Bogenlängen vom Anfange entfernten Theilpunkte mit gleichen Ziffern versehen, somit sind auch leicht die Punkte zu finden, deren Projection auf die Bahn nur ein Punkt ist. Dieser ist dann der Ort des Zusammentreffens. In der Zeichnung Fig. 12, Taf. II, sind die bezeichneten Punkte auf den Zeitcurven mit der Ziffer 19 bezeichnet.

§. 17. **Numerisches Beispiel.** Fig. 13, Taf. II. Gegeben sind zwei Körper von einer gewissen Längenausdehnung $AB = 500^m$ und $CD = 750^m$.*)

Im Anfangspunkte B resp. D der betrachteten Bewegung habe der eine Körper die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2{,}87^m$ pr. Sec., der andere eine Anfangsgeschwindigkeit $u_0 = 5{,}75^m$ pr. Sec.

Die Längsrichtung der Körper fällt in die geraden Bahnen, welche sich in S schneiden. Der Punkt S liegt von den bezüglichen Anfangspunkten um die Strecken

$$\left.\begin{aligned} BS &= x = 2825^m \\ DS &= y = 3200^m \end{aligned}\right\} \text{entfernt.}$$

*) Man könnte sich unter den Körpern Eisenbahnzüge denken und sich vorstellen, dass der die Masseneinheit beschleunigende Dampfdruck in jedem Augenblick bekannt sei. Mit Rücksicht hierauf sind auch die Werthe für die Anfangsgeschwindigkeiten gegeben. Ich habe es vorgezogen, dieses praktische Moment von der Aufgabe fern zu halten, damit mich nicht der Vorwurf trifft, solch eine Frage, wie sie in der Aufgabe gestellt ist, würde im Eisenbahnwesen nie gestellt werden, da man ja eben solche Eventualitäten zu vermeiden sucht. Wenn ich trotzdem diesen Fall im Auge habe, so ist es nur, um die ganze Fruchtbarkeit der zur Lösung verwandten Methoden in das rechte Licht zu stellen.

Das Gesetz der die Masseneinheit beschleunigenden Kräfte ist durch die bezüglichen Beschleunigungscurven gegeben und zwar sind deren Anfangsordinaten

$$p_0 = 0{,}01187^m$$
$$q_0 = 0{,}0035^m.$$

Es soll die Zeit bestimmt werden, in welcher die Stirnenden der beiden Körper im gemeinschaftlichen Schnittpunkte S beider Bahnen ankommen, und der Abstand des Punktes S vom Stirnende, in welchem der eine Körper in den andern hineindringt.

Die Grössen, welche die Aufgabe enthält, sind solche, wie sie etwa die Praxis für die Bewegung von Eisenbahnzügen stellen dürfte.

Wollten wir mit diesen Grössen die Construction der Geschwindigkeits- und Zeitcurven vornehmen, so würde dieselbe sehr mühsam sein, oder andererseits ungenau ausfallen, da die gegebenen Grössen in einem für die Construction sehr ungünstigen Verhältniss zu einander stehen. Wir sehen uns daher genöthigt, die betreffenden Grössen in verschiedenen passend gewählten Massstäben aufzutragen. Wir bezeichnen die so veränderten Grössen mit einem Strich oben und setzen für die eine Bahn

$$p_0' = \alpha p_0, \qquad \alpha = \frac{4}{5},$$
$$x' = \beta x, \qquad \beta = \frac{1}{50000},$$
$$v_0' = \gamma v_0, \qquad \gamma = \sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{250},$$

wonach wir erhalten,

$$\left.\begin{aligned} p_0' &= 9{,}5 \\ x' &= 56{,}5 \\ v_0' &= 11{,}5 \end{aligned}\right\} \text{ in Millimetern.}$$

Für die zur andern Bahn gehörigen Grössen wählen wir dieselben Massstäbe, so dass wir

$$\text{aus } \left|\begin{aligned} q_0' &= \alpha q_0 \\ y' &= \beta y \\ u_0' &= \gamma u_0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} q_0' &= 3{,}5 \\ y' &= 64 \\ u_0' &= 23 \end{aligned} \Bigg\} \text{ in Millimetern}$$

erhalten.

Mit diesen reducirten Grössen ist nun aus der gegebenen und mittelst der Massstäbe α und β veränderten Beschleunigungscurve in Fig. 13, Taf. II, über jeder Bahn die Geschwindigkeitscurve und Zeitcurve, letztere mit der willkürlich gewählten Geschwindigkeitsstrecke $u = 42{,}5^{mm}$ construirt.

Errichten wir in dem Schnittpunkte beider Bahnen S auf diesen Normalen, so schneiden dieselben die bezüglichen Zeitcurven in G und H. Die während der Bewegung der Körper verflossenen Zeiten sind proportional den Bögen BG und DH. Rectificiren wir dieselben, so finden wir

$$\sigma' = arc\,BG = 106^{mm},$$
$$\sigma_{,}' = arc\,DH = 98^{mm}.$$

Da die Geschwindigkeit $u = 42{,}5^{mm}$ ist, so folgt

$$t' = \frac{\sigma'}{u} = 2{,}5 \text{ Sec.},$$

$$t_{,}' = \frac{\sigma_{,}'}{u} = 2{,}3 \text{ Sec.}$$

Nach der unter C hergeleiteten Reductionsformel $t = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,t'$ ergiebt sich nunmehr $t = 200t'$, also ist die wahre Zeit, welche verfliesst, während das Stirnende des einen Körpers von B nach S gelangt,

$$t = 8 \text{ Min. } 20 \text{ Sec.},$$

und diejenige, welche verfliesst, während der andere Körper die Strecke DS zurücklegt,

$$t_1 = 7 \text{ Min. } 40 \text{ Sec.}$$

Der Vergleich dieser Werthe ergiebt, dass der Körper CD vom Körper AB getroffen wird.

Wir finden auf CD den bezüglichen Abstand l von D, wenn wir auf der Zeitcurve, welche der Bahn DS angehört, einen Punkt H_1 bestimmen, so dass

$$arc\,DH_1 = arc\,BG \text{ ist.}$$

Fällen wir von diesem Punkte aus ein Loth auf die Bahn DS, so schneidet dasselbe letztere in D_1. Das Stirnende des Körpers CD gelangt von D nach D_1 in derselben Zeit, in welcher das Stirnende B des andern Körpers in S anlangt.

Es giebt die Strecke $SD_1 = l'$ dividirt durch den Coefficienten β den Abstand, in welchem das Stirnende des einen Körpers AB den anderen Körper trifft. Wir erhalten

$$l = \frac{l'}{\beta} = 50000.7^{mm},$$
$$l = 350^{m}.$$

Die Geschwindigkeit v, mit welcher der Zusammenstoss erfolgt, ist proportional der Geschwindigkeitsordinate v' in S. Da $v' = 31^{mm}$ ist, so folgt

$$v = \frac{v'}{\gamma} = 31.250,$$
$$v = 7{,}75^{m} \text{ pro Sec.}$$

Diese Aufgabe ist geeignet, den Nachweis zu führen, dass auch nach einer andern Richtung hin die Anwendung unserer graphischen Methode sich als sehr fruchtbar erweist.

Wir wollen zu dem Ende folgende Bedingung stellen. Der Körper AB habe von B aus den Weg $BE = 500^{m}$ zurückgelegt. In diesem Augenblick soll eine verzögernde Kraft auftreten, welche die beschleunigenden Kräfte um ein constantes Stück vermindert und bewirkt, dass kein Zusammenstoss erfolgt.

Wie gross ist mindestens diese verzögernde Kraft zu nehmen, damit der Körper CD in seiner ganzen Länge den Schnittpunkt S eher passirt, als die Stirnfläche des andern.

Wenn das Ende C des Körpers CD eben den Punkt S passirt hat, sei die Stirnfläche in $D_{,,}$ angekommen.

Die in $D_{,,}$ errichtete Verticale schneidet die Zeitcurve in L, die Zeit, welche verfliesst, während der Körper CD die Strecke $DD_{,,}$ zurücklegt, ist proportional *arc* DL.

Wenn längs der Strecke ES der andern Bahn in Folge der um eine constante Grösse verminderten Beschleunigung, die Geschwindigkeit im Verhältniss zum Wege in einem geringeren Grade wächst, als früher, so hat die entsprechende Zeitcurve eine geringere Krümmung als die alte, und ihr Schnittpunkt K mit der durch S gehenden Normalen liegt vom Anfangspunkte B um eine weitere Strecke ab, als *arc* BG beträgt. Sobald nun

$arc\,BK \gtreqless arc\,DL$ ist, ist auch die zum Wege BS gehörige Zeit gleich oder grösser, als die zum Wege $DD_{,,}$ gehörige. Dies ist in unserer Aufgabe verlangt.

Wir haben also an das Ende N des Zeitcurvenbogens BN eine neue Zeitcurve NK anzusetzen, so dass $arc\,BN + arc\,NK \gtreqless arc\,DL$ ist. Diese Bedingung ist zeichnerisch leicht zu erfüllen.

Hinsichtlich der Krümmung, mit welcher diese neue Zeitcurve NK verläuft, stellt unsere Bedingung nichts fest. Von ihr ist aber offenbar der Verlauf der neuen Geschwindigkeitscurve und der neuen Beschleunigungscurve über dem Wege ES abhängig. Da wir nun umgekehrt die neuen Beschleunigungscurven durch die Bedingung gegeben haben, dass die Ordinaten der alten um ein constantes Stück verkürzt sind, so ist auch die Krümmung der neuen Zeitcurve zwischen EK in jedem Punkte vollständig gegeben: Es wäre interessant, wenn wir diese a priori construiren könnten. Dies ist aber in einfacher Weise nicht möglich. Wir ziehen es daher vor, die Aufgabe in folgender Weise annähernd zu lösen.

Wir verzeichnen eine neue Zeitcurve von NK zwischen dem Punkte N und der Normalen in S, mittelst eines Curvenlineals von möglichst gleichmässiger Krümmung, so dass $arc\,NK = arc\,DL$ ist und die Curve bei N tangential in den Bogen BN übergeht, bestimmen dann aus drei Punkten NTK der neuen Zeitcurve nach der §. 8, S. 11 [vergl. Fig. 6, Taf. I], gegebenen Construction die Punkte der zugehörigen Geschwindigkeits- und Beschleunigungscurve $N_, T_, K_,$ und $N_{,,} T_{,,} K_{,,}$. Durch diese Punkte sind die Curven im vorliegenden Falle hinlänglich genau bestimmt.

Die Curven sind in der Zeichnung Fig. 13, Taf. II, punktirt. Ihr Verlauf lässt erkennen, ob die Bedingung hinsichtlich der constanten Verkürzung der Beschleunigungsordinaten im Allgemeinen gewahrt ist. Trotzdem man hierbei wesentlich aufs Probiren angewiesen ist, wird es bei einiger Uebung im Zeichnen wohl gelingen, die Beschleunigungscurve in der gewünschten Lage zu erhalten. Trifft dieses nicht ein, so bieten doch die construirten Curven Anhaltspunkte genug, wie die Construction durchzuführen

ist. In der Fig. 13 stellt die schraffirte Fläche die negative Arbeit dar, welche die verzögerte Ankunft des Körpers in S veranlasst.

F) Verkleinerung der bei der Construction der Zeitcurve entstehenden Fehler.

§. 18. Bei der Construction der Zeitcurve unter B) a) §. 8 wurde bereits darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn die Geschwindigkeitscurve von Null aufsteigt, die ersten Bogenelemente der Zeitcurve hinsichtlich ihrer Längen nicht genau verzeichnet werden können. Da die nach dem zurückgelegten Wege x verflossene Zeit t proportional dem Bogen der Zeitcurve ist, so ist einleuchtend, dass hier eine bedeutendere Fehlerquelle vorhanden ist. Die Discussion der einfachen Bewegungen im vorigen Abschnitt giebt die Mittel an die Hand, diese Fehlerquelle fast ganz zu beseitigen.

Wir nehmen an, die zu einer bestimmten Beschleunigungscurve gehörige Geschwindigkeitscurve sei construirt.

Wenn erstere einen stetigen Verlauf hat, so können drei Fälle eintreten:

Der vom Anfangspunkt sich erstreckende und zu einem bestimmten Wege c gehörige Theil der Beschleunigungscurve ist nahezu parallel der Bahn oder erstreckt sich gegen, resp. von derselben fort.

Jedenfalls wird man für einen gewissen mehr oder minder grossen Weg c den Bogen der Beschleunigungscurve durch eine gerade Strecke ersetzen können, deren Verlängerung mit der Horizontalen entweder den Winkel 0, $+\alpha$ oder $-\alpha$ einschliesst. Im ersten Falle können wir für den von O (siehe Fig. 14_a, Taf. I) über der Wegstrecke $OD = c$ aufsteigenden Theil der Geschwindigkeitscurve mit grosser Annäherung eine Parabel substituiren, deren halber Parameter $= p_0$ ist (Anfangsordinate der Beschleunigungscurve). Die Zeit, welche also der Punkt M braucht, um die Strecke OD zurückzulegen, ist $t' = \frac{v_0}{p_0}$, wenn wir mit v_0 die Geschwindigkeitsordinate DB bezeichnen.

Im zweiten Falle, wo (Fig. 14_b, Taf. I) die Verlängerung der Strecke AC der Beschleunigungscurve die positive Abscisse

schneidet, können wir für die von O bis B aufsteigende Geschwindigkeitscurve mit grosser Annäherung eine Ellipse substituiren, deren grosse Axe $OG = a$ und deren kleine Axe $b = \sqrt{p_0 a}$ ist. Wählen wir letztere als Einheit für die Geschwindigkeit u des Hilfspunktes μ, so ist der um G mit a beschriebene Kreis zwischen O und E die Zeitcurve, auf welcher der Hilfspunkt μ mit der constanten Geschwindigkeit $u = \sqrt{p_0 a}$ läuft.

Wenn die grösste Ordinate der Geschwindigkeitscurve noch kleiner ist als u, so steht nichts im Wege, von E an mit derselben Einheit u die Zeitcurve zu construiren, welche natürlich tangential in den Kreisbogen übergeht.

Die zum Wege c gehörige Zeit t' ist, wenn wir den rectificirten Kreisbogen OE mit σ' bezeichnen,

$$t' = \frac{\sigma'}{u} = \frac{\sigma'}{\sqrt{p_0 a}}.$$

Ist die grösste Geschwindigkeitsordinate indess $> \sqrt{p_0 a}$, so muss man für die von E ab zu construirende Zeitcurve eine neue Geschwindigkeit u wählen und dies bei der Bestimmung der von D ab verfliessenden Zeit berücksichtigen.

Wenn der dritte Fall vorliegt (Fig. 14_c, Taf. I), in welchem die Verlängerung der zum Wege c gehörigen Strecke AC der Beschleunigungscurve die negative Abscisse schneidet, so können wir freilich nach §. 15 unter E die Geschwindigkeitscurve durch eine Hyperbel ersetzen, aber eine einfach zu verzeichnende Zeitcurve existirt nicht. Es bleibt dann nur übrig, entweder die zum Wege c gehörige Zeit nach der daselbst gegebenen Formel

$$t' = \frac{a}{b} . ln\left(\frac{x}{a} + \frac{v}{b}\right)$$

zu berechnen, wobei $a\,b\,x\,v$ als lineare Grössen ($a = GO$; $b = OE$; $x = GD$; $v = DB$) der Zeichnung zu entnehmen sind, oder man bestimmt die von dem bezüglichen Fahrstrahl GB von O bis B bestrichene und in der Figur schraffirte Fläche und dividirt dieselbe durch $\frac{b^2}{2}$, resp. was dasselbe ist, durch den Inhalt des $\triangle\, GOA$.

II. Kapitel.

Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes in krummer Bahn.

§. 19. Die Gestalt der Bahn, in welcher sich ein freier materieller Punkt bewegt, ist bedingt durch das Gesetz, nach welchem sich die Grösse und Richtung der wirkenden Kraft ändert.

Wir haben uns mit der allgemeinen Aufgabe zu beschäftigen, die Bahn, welche der materielle Punkt durchläuft, aus dem Gesetz der wirkenden Kräfte herzuleiten. Bevor wir hierauf eingehen, müssen wir zunächst den „Hodographen", eine Erfindung Hamilton's, erklären, weil derselbe in allen späteren Untersuchungen eine sehr wichtige Rolle spielt.

Construction und Eigenschaften des Hodographen.

Gegeben sei die Bahn, welche ein materieller Punkt M unter der Wirkung bestimmter Kräfte durchläuft und das Gesetz seiner Geschwindigkeit. Wir wählen irgend einen beliebigen Punkt O der Ebene, Fig. 15, Taf. II, und tragen an denselben eine Strecke an, welche gleich und parallel der Geschwindigkeit v ist. Der Endpunkt m dieser Strecke ist ein Punkt des Hodographen.

Denken wir uns auf diese Weise für alle Lagen des Punktes M auf seiner Bahn die Geschwindigkeiten v nach O transponirt, so erhalten wir eine Curve, welche der Hodograph für die Bewegung des Punktes auf seiner Bahn genannt wird. Derselbe, von Hamilton erfunden, besitzt höchst wichtige Eigenschaften, die zunächst hergeleitet werden sollen:

Die Richtung der Bahngeschwindigkeit des Punktes M fällt stets in die Richtung der Tangente. Nennen wir den Contingenzwinkel derselben $d\tau$, so hat bei einer unendlich kleinen Bewegung des Punktes M nach M_1, sich auch der Hodographenstrahl um den unendlich kleinen Winkel $d\tau$ gedreht. Dabei habe die Geschwindigkeit v um dv zugenommen.

Nennen wir das Bogenelement des Hodographen du, so ist du die unendlich kleine Geschwindigkeitscomponente, welche, zu v hinzutretend, nach Grösse und Richtung die veränderte Geschwindigkeit $v_1 = v + dv$ giebt. Diese Aenderung der ursprünglichen Geschwindigkeit in der Zeit dt, d. h. die Beschleunigung des Punktes M bewirkt eben die denselben afficirende Kraft P. Da erstere nur in die Richtung von P fallen kann, so folgt:

Satz: Die Tangente an den Hodographen giebt die Richtung der effectiven Beschleunigung, d. h. die Richtung der beschleunigenden Kraft.

Es seien p_1 und p_2 die Componenten der beschleunigenden Kraft p pro Masseneinheit nach der X- und Y-Achse eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, v_1 und v_2 die Componenten der Geschwindigkeit nach denselben, so ist

$$p_1 = \frac{dv_1}{dt} \text{ und } p_2 = \frac{dv_2}{dt}.$$

Nun ist

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2,$$

also

$$p^2 = \frac{(dv_1)^2 + (dv_2)^2}{dt^2}.$$

Nennen wir die Ordinaten des Hodographen ξ und η, so ist in Folge der Definition

$$\xi = v_1 ; \eta = v_2,$$

also

$$p^2 = \frac{(d\xi)^2 + (d\eta)^2}{dt^2} = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2.$$

$\frac{d\sigma}{dt} = w$ ist die Geschwindigkeit des Punktes m auf dem Hodographen, somit ist $p = w$.

Hieraus und aus dem Früheren folgt der

Satz: Die Geschwindigkeit des entsprechenden Punktes m auf dem Hodographen ist nach Grösse und Richtung gleich der beschleunigenden Kraft pro Masseneinheit.

Sei ϱ der Krümmungsradius der Bahn, ds das zugehörige Bogenelement, so ist

$$\varrho d\tau = ds,$$

durch ϱdt beiderseits dividirt, giebt

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{v}{\varrho}.$$

Nun ist aber $\frac{d\tau}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich der Hodographenstrahl um seinen Mittelpunkt dreht. Wir haben somit den

Satz: Die Winkelgeschwindigkeit des Hodographenstrahls ist proportional der Bahngeschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Krümmungsradius.

Bewegt sich z. B. der Punkt M auf gerader Bahn, so ist $\varrho = \infty$, also $\frac{d\tau}{dt} = 0$, d. h. der Hodograph ist eine gerade unbewegte Linie, das Gesetz der Geschwindigkeitsänderung bleibt unbestimmt.

Bewegt sich der Punkt M auf einem Kreis, so ist ϱ constant und $\frac{d\tau}{dt}$ proportional der Geschwindigkeit v.

So lange die Bahn stets nur nach einer Seite gekrümmt ist, ist der Sinn, in welchem der Hodographenstrahl sich dreht, derselbe. Passirt dagegen der Punkt M einen Wendepunkt seiner Bahn, so ist in diesem Augenblick die Winkelgeschwindigkeit des Hodographenstrahls Null und die Drehung desselben erfolgt weiterhin im entgegengesetzten Sinne. Man findet diese charakteristischen Stellen im Hodographen, wenn man vom Mittelpunkte an die Hodographencurve Tangenten zieht. Von diesen Tangirungspunkten aus sind rückwärts leicht die entsprechenden Punkte der Bahn (ihre Wendepunkte) zu construiren. Ebenso leicht können wir mit Zuhilfenahme der Beschleunigung den Krümmungsradius ϱ der Bahn an irgend einer Stelle bestimmen, was noch späterhin an geeigneter Stelle behandelt werden soll.

A) Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einfluss beliebig gerichteter Kräfte.

§. 20. Wirken beliebig gerichtete Kräfte auf einen frei beweglichen Punkt, so ist die Wirkung derselben gleich derjenigen der

Resultante. Wir dürfen uns also im Folgenden nur auf die Beantwortung der Frage beschränken, welchen Einfluss eine einzige beschleunigende aber beliebig gerichtete Kraft auf die Bewegung eines Punktes ausübt und in wie weit eine graphische Darstellung der letzteren und der dabei in Betracht kommenden mechanischen Grössen auch hier möglich ist.

Das Gesetz, wonach sich die Grösse und Richtung der beschleunigenden Kraft ändert, kann in zweierlei Art gegeben sein.

Erster Fall.

Es ist das Gesetz der beschleunigenden Kraft durch die Aenderung ihrer Componenten nach zwei auf einander senkrechten Richtungen gegeben.

§. 21. Nehmen wir diese Richtungen zu Axen eines Ordinatensystems, so soll über jeder derselben das Gesetz der Aenderung der Componenten wie bei der geradlinigen Bewegung durch eine Curve gegeben sein, deren Ordinaten die Componenten der effectiven Beschleunigung d. i. der beschleunigenden Kraft pro Masseneinheit darstellen.

Die Gleichungen dieser Curven seien

$$p_1 = f_1(x);\ p_2 = f_2(y).$$

Unter dem Einflusse der componirenden beschleunigenden Kräfte durchläuft der Punkt M in der Ebene eine ganz bestimmte Bahn.

Zur Ermittelung derselben nennen wir v_1 und v_2 die Componenten der absoluten Geschwindigkeit, welche M an irgend einer Stelle seiner Bahn besitzt, p_1 und p_2 die entsprechenden Beschleunigungscomponenten. Dann ist

$$p_1 = \frac{d v_1}{d t} = \frac{d v_1}{d x} \cdot v_1,$$

$$p_2 = \frac{d v_2}{d t} = \frac{d v_2}{d y} \cdot v_2.$$

Die Projectionen M_1 und M_2 des bewegten Punktes auf die X- und Y-Axe müssen sich auf diesen so bewegen, dass die beiden vorstehenden Bedingungen erfüllt sind, und zwar muss die Bewegung jedes Projectionspunktes auf seiner zugehörigen Axe, da wir ausdrücklich jede Abhängigkeit ausgeschlossen haben, gerade

so erfolgen, als wenn die andere Projectionsbewegung nicht existirte. Wir können also nach den für die geradlinige Bewegung aufgestellten Methoden aus den Beschleunigungscurven

$$p_1 = f_1(x) \qquad p_2 = f_2(y)$$

die Geschwindigkeitscurven

$$v_1 = \varphi_1(x) \qquad v_2 = \varphi_2(y)$$

construiren. Das Gesetz, wonach sich die Geschwindigkeitscomponenten des bewegten Punktes mit den Ordinaten der Bahn ändern, ist somit graphisch bestimmt.

Um nun die absolute Bahn zu finden, welche der Punkt M beschreibt, müssen wir die Wegstrecken auf der X- und Y-Axe bestimmen, welche von den Projectionen M_1 und M_2 in gleichen Zeiten zurückgelegt werden.

Analytisch geht man in gleicher Weise vor, indem man aus den beiden Gleichungen, welche die Ordinaten als Function der Zeit enthalten, letztere eliminirt. Graphisch haben wir zunächst die Zeit darzustellen, und da dieses, wie wir unter B) Kapitel I gezeigt haben, auf dreierlei Art geschehen kann, so ergeben sich auch drei Methoden, die Bahn zu construiren.

Aus den bereits an der erwähnten Stelle angeführten Gründen verzichten wir auf die Construction der Bahn, wenn die Zeit durch Flächen, resp. durch Ordinaten, dargestellt wird, und wollen uns im Folgenden nur mit der Methode beschäftigen, die sich für die Verzeichnung der Bahn ergiebt, wenn die Zeit durch den Bogen der Zeitcurve dargestellt wird:

Aus den Geschwindigkeitscurven construiren wir nach dem S. 11, §. 8 angegebenen Verfahren über jeder Ordinatenaxe die Zeitcurve, d. h. diejenige Curve, welche ein Hilfspunkt μ mit constanter Geschwindigkeit u durchläuft, während die zugehörige Projection M_1 und M_2, resp. der Punkt M selbst seine gesetzmässige Bewegung vollführt.

Setzen wir voraus, dass wir bei der Construction der beiden Zeitcurven dieselbe Geschwindigkeitsstrecke u benutzen, so werden in gleichen Zeiten von den Hilfspunkten μ_1 und μ_2 auch gleiche Bögen auf ihren bezüglichen Curven zurückgelegt; stecken wir also auf denselben vom Anfangspunkte der Bewegung gleiche Längen ab, so geben die Ordinaten gleicher Theilpunkte in ihren Schnitt-

punkten die gesuchte Bahn. Auf diese Weise ist die in Fig. 16, Taf. 2, enthaltene Construction ausgeführt.

Es ist durch *O*, den Anfangspunkt der Bewegung, ein rechtwinkeliges Ordinatensystem gelegt, *X*, *Y*. Im Quadranten I sind über jeder Axe die beiden Beschleunigungscurven gegeben, aus diesen sind die Geschwindigkeitscurven construirt, welche im Quadranten IV und II liegen. Daselbst befinden sich auch die mittelst der beliebig gewählten, aber in beiden Fällen gleich grossen Geschwindigkeitsstrecke *u* construirten Zeitcurven.

Numeriren wir die um gleiche Bogenstrecken von *O* entfernt liegenden Theilpunkte der Zeitcurven mit einer von *O* beginnenden Zahlenreihe, so geben die Schnittpunkte der Ordinaten correspondirender Theilpunkte im Quadranten I die gesuchte Bahn. Diese Ordinaten schneiden aber auch die Geschwindigkeitscurven in m_1 und m_2. Da die Ordinaten von m_1 und m_2 einen rechten Winkel bilden und die Componenten der absoluten Geschwindigkeit darstellen, welche *M* in seiner Bahn besitzt, so müssen die durch m_1 und m_2 gelegten Projectionsstrahlen im Quadranten III einen Punkt (*m*) des Hodographen geben. Freilich befindet sich derselbe, wenn er in der angedeuteten Weise verzeichnet wird, nicht in der richtigen Lage zur Bahn. Zu dem Ende haben wir im vorliegenden Falle den Hodographen um eine durch *O* gehende und im Quadranten IV unter 45° liegende Gerade als Axe zu drehen. An dem richtig gelegenen Hodographen muss die Tangente in *m* die Richtung der effectiven Beschleunigung des Punktes *M* geben. Beide sind in der Figur verzeichnet.

Da wir die Richtung der effectiven Beschleunigung durch Zusammensetzung ihrer gegebenen Componenten finden, so haben wir hierin eine Controle für die Genauigkeit der Construction.

Die Art der Zusammensetzung kann es zur Folge haben, dass nur eine Drehung von 90° um *O* genügt, um den Hodographen in die richtige Lage zur Bahn zu bringen. In jedem einzelnen Falle wird man leicht entscheiden können, um welchen Winkel die Drehung vorzunehmen ist. —

Durch den Hodographen ist uns die Bahngeschwindigkeit des Punktes *M* an jeder Stelle bekannt, somit kennen wir auch die

lebendige Kraft, mit welcher er irgend eine Stelle seiner Bahn passirt.

Wächst die Geschwindigkeit, während der Punkt die Strecke s seiner Bahn zurücklegt, von v_0 auf v_1, so ist die Zunahme der lebendigen Kraft auf diesem Wege

$$\frac{M}{2}(v_1^2 - v_0^2)$$

bekannt, da v_1 und v_0 entsprechende Strahlen des Hodographen sind. Gleichzeitig repräsentirt dieser Werth die von der beschleunigenden Kraft geleistete Arbeit. Da uns ausserdem die inzwischen verflossene Zeit $t = \frac{\sigma}{u}$ bekannt ist (σ ist der der Bahnstrecke s entsprechende Bogen der Zeitcurve s. §. 8), so haben wir auch, indem wir die Arbeitsgrösse durch den Quotienten $\frac{\sigma}{u}$ dividiren, die geleistete Arbeitsstärke

$$L = \frac{M}{2}(v_1^2 - v_0^2)\frac{u}{\sigma}.$$

§. 22. **Umgekehrte Aufgabe.** Es ist die Bahn des materiellen Punktes bekannt und durch Beobachtung festgestellt, wo er sich nach gleichen Zeiträumen befindet. Es soll das Gesetz der beschleunigenden Kraft gefunden werden.

Das Verfahren, welches wir zur graphischen Lösung der vorstehenden Aufgabe anwenden, ist analog demjenigen der entsprechenden Aufgabe der geradlinigen Bewegung (§. 9, S. 14).

Wir legen durch den Anfangspunkt der Bewegung ein rechtwinkeliges Ordinatensystem und parallel den Axen desselben durch die gegebenen Punkte der Bahn ein System gerader Linien. Nun gehen wir von O aus mit einer festen, an sich beliebigen, Zirkelöffnung $\Delta\sigma$ (jedoch grösser als der grösste gegebene Abstand Δx resp. Δy) von Parallele zu Parallele. Die Punkte, welche wir auf diese Weise, sowohl senkrecht über der X-Axe, als senkrecht über der Y-Axe erhalten, gehören zwei Zeitcurven an, auf welchen die resp. Hilfspunkte μ_1 und μ_2 in gleichen Zeiten Δt gleiche Wege $\Delta\sigma$ zurücklegen.

Die Geschwindigkeit u, mit welcher sie sich bewegen, ist
$$u = \frac{\triangle \sigma}{\triangle t}.$$

Aus den Zeitcurven construiren wir nun in bekannter Weise die Geschwindigkeitscurven und aus diesen die Beschleunigungscurven. Hiermit ist die Aufgabe gelöst.

Von der Wahl der constanten Zirkelöffnung $\triangle \sigma$ hängt die Lage und Krümmung der Zeitcurve ab. Offenbar ist aber hiervon die Gestalt der Geschwindigkeitscurve ganz unabhängig, da die Geschwindigkeit u, mit welcher sich der Hilfspunkt μ bewegt, proportional der Zirkelöffnung $\triangle \sigma$ wächst.

Anwendungen.

1) Problem des geworfenen Projectils (eines schweren Körpers) im luftleeren Raum.

a) Der Körper habe eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit und falle abwärts.

§. 23. **Aufgabe.** Es ist graphisch die Wurflinie zu bestimmen und die Zeit, in welcher der Körper einen gewissen Theil seiner Bahn zurücklegt.

O sei der Anfangspunkt der Bewegung, v_1 die Anfangsgeschwindigkeit (siehe Fig. 17, Taf. II). Die beschleunigende Kraft der Schwere ist mit der Y-Axe des durch O gelegten Ordinatensystems gleichgerichtet. Tragen wir erstere als Beschleunigungscurve auf, so erhalten wir eine gerade Linie, welche der Y-Axe parallel den Abstand $OA = g = 9{,}81^m$ (Beschleunigung der Schwere) hat, denn $g = p$ ist die die Masseneinheit des Körpers beschleunigende Kraft. Wie schon früher in Kapitel I, §. 13 nachgewiesen, ist die Geschwindigkeitscurve nach der Y-Axe eine Parabel vom Parameter $2g$. Nach der X-Axe ist dieselbe, da die Beschleunigung der Schwere keine tangentiale Componente hat, eine gerade Linie BC, welche der X-Axe parallel geht und von ihr den Abstand $OB = v_1$ hat.

Nun könnten wir nach dem vorhin §. 21 auseinander gesetzten allgemeinen Verfahren über jeder Axe die Zeitcurve construiren,

jede derselben in eine Anzahl gleicher Theile theilen (vorausgesetzt, dass auch die bezüglichen Geschwindigkeitsstrecken u für beide Zeitcurven gleich gross gewählt sind) und durch die correspondirenden Theilpunkte Parallelen zu den Ordinatenaxen legen. Dieselben würden durch ihre Schnittpunkte im Quadranten I die Wurflinie bestimmen.

Allein im vorliegenden Falle lässt sich die Construction der Wurflinie viel einfacher durchführen, indem wir die im vorigen Kapitel §. 13 aufgestellten Eigenschaften des freien Falles benutzen.

Die Anwendung derselben für den vorliegenden Fall giebt für die Zeit, welche verfliesst, während die Verticalprojection des Körpers die Höhe h durchfällt, den Werth $t = \frac{v_2}{g}$.

Hiernach ist die verflossene Zeit proportional den verticalen Geschwindigkeitscomponenten, die wir als Ordinaten der Geschwindigkeitsparabel entnehmen.

Wie an der citirten Stelle bereits angegeben, theilen wir die Scheiteltangente der Parabel mit der Strecke g oder einem Bruchtheil derselben $\frac{g}{n}$ (n bedeutet eine bestimmte Zahl, in der Zeichnung $= 2$ gesetzt) in gleiche Theile und legen durch die Theilpunkte Verticalen. Die Schnittpunkte m_2 derselben mit der Geschwindigkeitsparabel horizontal auf die Falllinie OY projicirt, geben die Stellen, welche die Verticalprojection M_2 des materiellen Punktes M in gleichen Zeiten passirt.

Weil die Geschwindigkeitscurve über der X-Axe eine horizontale Linie ist, so legt die Horizontalprojection M_1 des bewegten Körpers in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück und finden wir die bezüglichen Theilpunkte, wenn wir die X-Axe von O aus mit v_1 oder $\frac{v_1}{n}$ in gleiche Theile theilen. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen geben nun die Bahn des Punktes.

Die Bahn ist wie bekannt eine Parabel.

Dies folgt geometrisch, wie leicht einzusehen, aus der Thatsache, dass die einander entsprechenden horizontalen Ordinaten der Bahn und der Geschwindigkeitsparabel im constanten Verhältniss zu einander stehen; demzufolge ist die Bahn aus der Ge-

schwindigkeitsparabel durch eine verticale Parallelprojection herzuleiten, wenn man die Ebene der ersteren so um die Y-Axe dreht, dass der Winkel γ, den sie mit der Ebene der Geschwindigkeitsparabel bildet, bestimmt ist durch die Gleichung

$$\cos\gamma = \frac{g}{v_1}.$$

Der Hodograph ist, wie die Construction im III. Quadranten zeigt, eine Gerade, die von O den Abstand v_1 hat und in die richtige Lage zur Bahn gelangt (nämlich parallel OY), wenn sie um eine durch O unter 45^0 im IV. Quadranten gelegte Gerade als Axe gedreht wird.

Ziehen wir in irgend einem Punkte M an die Wurfparabel eine Tangente und zu derselben parallel durch O einen Strahl, so schneidet derselbe die Hodographengerade im Punkte m. Om giebt dann als Hodographenstrahl die Bahngeschwindigkeit von M. Weil der Hodograph selbst eine gerade Linie ist, die gleichzeitig als Tangente an die Hodographencurve zu definiren ist, so hat auch nach dem im Anfange dieses Kapitels unter „Construction und Eigenschaften des Hodographen" aufgestellten Satze §. 19 die beschleunigende Kraft eine constante Richtung, was in der That eine specifische Eigenschaft der Schwere ist.

Während M sich auf seiner Bahn bewegt, durchläuft der Endpunkt m des Hodographenstrahls mit einer gewissen Geschwindigkeit den Hodographen. Die Ordinaten des Hodographenpunktes m sind v_1 und v_2. v_2 wächst proportional der Zeit, also legt auch m in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück, d. h. die Geschwindigkeit w des Hodographenpunktes ist constant. Dies stimmt ebenfalls mit der Thatsache überein, dass die Beschleunigung der Schwere auch hinsichtlich ihrer Grösse unveränderlich ist.

b) Der Körper werde mit beliebig gerichteter Anfangsgeschwindigkeit nach aufwärts geworfen.

§. 24. **Aufgabe.** Es soll die Bahn und der Hodograph construirt werden.

Gegeben ist der Ausgangspunkt O und die Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 (s. Fig. 18, Taf. II).

Wir legen durch den Ausgangspunkt ein Coordinatensystem, tragen in O die Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 an und zerlegen dieselbe nach den Axenrichtungen. Aus der Beschleunigung der Schwere, die jetzt verzögernd wirkt und der um 90^0 in die Horizontale gedrehten verticalen Geschwindigkeitscomponente v_2 construiren wir zunächst die Geschwindigkeitscurve (Parabel) nach aufwärts, bis diese in die Y-Axe bei A einschneidet. Dadurch ist die Scheitelhöhe OA der Bahn gefunden.

Mit der horizontalen Geschwindigkeitscomponente legt die Horizontalprojection M_1 des Körpers M in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück. Dasselbe gilt von der Horizontalprojection μ des entsprechenden Punktes m_2 auf der Geschwindigkeitsparabel und verhalten sich die von den beiden projicirten Punkten gleichzeitig zurückgelegten Wege, wie v_1 zu g. Wir haben also auch hier nur nöthig, die X-Axe links und rechts vom Nullpunkte O mit den Strecken g oder v_1 bezüglich den Theilen derselben $\frac{g}{n}$ und $\frac{v_1}{n}$ in gleiche Theile zu theilen. Die Verticalen links von O bestimmen zunächst Punkte auf der Geschwindigkeitsparabel; die durch dieselben gelegten Horizontalen schneiden die entsprechenden Verticalen rechts von O in Punkten der gesuchten Wurflinie. Dass auch hier die Wurflinie eine Parabel ist und sich aus der Geschwindigkeitsparabel durch Parallelprojection $\left(\cos\gamma = \frac{g}{v_1}\right)$ herleiten lässt, dass auch hier der Hodograph eine gerade Linie ist und zwar die durch den Endpunkt von v_1 gezogene Verticale, bedarf wohl keines Beweises.

Um die Anwendbarkeit unsers graphischen Verfahrens nach anderer Richtung hin zu erweisen, behandeln wir noch eine zweite

§. 25. **Aufgabe.** Gegeben ist der Anfangspunkt des Wurfs, die Horizontale, bis zu welcher die Wurflinie steigen und ein Ort P, der von dem Projectil getroffen werden soll. Gesucht wird die Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit.

Da die Scheitelhöhe OF der Wurflinie gegeben ist, Fig. 19, Taf. II, so können wir die Geschwindigkeitsparabel vom Punkte F an nach abwärts verzeichnen.

Die Endordinate OA stellt, um 90° gedreht, die verticale Componente der Anfangsgeschwindigkeit dar.

Ziehen wir durch den gegebenen Punkt P eine Horizontale, so schneidet diese die Geschwindigkeitsparabel in C. Die Verticale durch C markirt auf AO den Punkt E, die Verticale durch B auf der Horizontalen OM den Punkt N.

Nun wissen wir, dass, während der Punkt M seine Bahn verfolgt, die Horizontalprojection μ des auf der Geschwindigkeitsparabel in gleicher Höhe mit M sich bewegenden Punktes m_2 in gleichen Zeiträumen gleiche Wege zurücklegt. Dasselbe thut die Horizontalprojection M_1 des Punktes M. Die von μ und M_1 gleichzeitig zurückgelegten Wege verhalten sich wie g zu v_1, daher muss auch

$$\frac{AE}{ON} = \frac{g}{v_1}$$

sein. Hieraus folgt

$$v_1 = \frac{OA}{AE} g.$$

Errichten wir demnach in E das Loth $EB = g$, ziehen zu der Linie AB eine Linie parallel durch O, so schneidet dieselbe die durch P gehende Verticale in D. ND ist die gesuchte Horizontalcomponente v_1 und selbige mit v_2 in O zusammengesetzt, giebt die Richtung und Grösse der gesuchten Anfangsgeschwindigkeit v_0. Das Verzeichnen der Wurfparabel und des Hodographen erfolgt nun in der unter b) angegebenen Weise.*)

2) Sinusbewegung.

§. 26. **Aufgabe.** Die in verticaler Richtung auf einen Körper wirkende Kraft verzögere dessen Bewegung und

*) Ausser den beiden behandelten Aufgaben werden in der Mechanik oft noch Aufgaben, das Wurfproblem betreffend, gestellt, die nach unserm graphischen Verfahren ohne Weiteres nicht zu lösen sind, und wo man sich doch genöthigt sieht, die Aufgabe auf rechnerischem Wege zu lösen. Ueberhaupt führt die Rechnung gerade beim Wurfproblem oft schneller zum Ziel, als die Construction, zumal wenn man sich genöthigt sieht, mit reducirten Grössen zu construiren. Dieser Fall liegt in einer später behandelten Aufgabe vor. Die graphische Behandlung des Wurfproblems erscheint indess geeignet, die bei demselben auftretenden wichtigen Erscheinungen geometrisch zu verkörpern und auf diese Weise das Verständniss derselben wesentlich zu fördern.

nehme der absoluten Grösse nach proportional der Entfernung ab. Die Richtung und Grösse der Anfangsgeschwindigkeit, sowie der Ausgangspunkt der Bahn sei gegeben. Es soll die Bahn construirt werden und der Hodograph der Bewegung.

Analog der beim Problem des geworfenen Projectils gegebenen Construction drehen wir die verticale Anfangsgeschwindigkeit v_2 um 90° in die Horizontale, Fig. 20, Taf. III, und verzeichnen vom Endpunkte derselben die Geschwindigkeitscurve, welche, da die Beschleunigungscurve der Annahme nach eine gerade Linie ist, eine Ellipse ist und bei B in die Verticale einschneidet. OB ist die Scheitelhöhe der Bahn.

Als Zeitcurve über der Y-Axe wählen wir den um O mit OB beschriebenen Kreis, auf welchem der Hilfspunkt μ_2 mit einer Geschwindigkeit läuft, welche gleich v_2 der kleinen Axe der Ellipse ist (vergl. §. 14).

Die Zeitcurve nach der X-Axe ist eine gerade Linie, deren Neigung gegen die X-Axe wir erhalten, wenn wir die Geschwindigkeitsstrecke $u = v_2$ zwischen die X-Axe und die ihr parallel laufende Geschwindigkeitsgerade DE einpassen. Auf dieser Strecke u steht die Zeitgerade senkrecht. Theilen wir nun diese und den Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und legen durch die Theilpunkte Projectionsstrahlen, so erhalten wir in deren Schnittpunkten die gesuchte Bahn. Dieselbe ist eine Sinuslinie. Der Hodograph ist die um 90° gedrehte horizontale Geschwindigkeitsgerade.

3) Zusammensetzung zweier harmonischer Bewegungen in zwei zu einander senkrechten Richtungen.

§. 27. Zusammengesetzte harmonische Bewegungen spielen bekanntlich in der Physik, namentlich in der Optik und Akustik, eine grosse Rolle. Obgleich dieselben von mehr theoretischem als praktischem Werthe sind, besonders was die Gestalt der Bahnen und das Bewegungsgesetz anbelangt, so sind sie doch im hohen Grade geeignet, die Anwendbarkeit der graphischen Methoden zur Lösung ähnlicher Aufgaben zu zeigen. Ausserdem bieten die

folgenden Constructionen ein erhebliches Interesse dar, weil einige Fragen, die, analytisch behandelt, zu ausserordentlichen Schwierigkeiten Veranlassung geben, graphisch in sehr übersichtlicher Weise ihre Beantwortung finden.

Hinsichtlich der einfachen harmonischen Bewegung ist unter E) 2) Kapitel I, §. 14 nachgewiesen, dass die Geschwindigkeitscurve eine Ellipse ist, deren grosse Axe die Amplitude, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Bewegung, und deren halbe kleine Axe b die constante Geschwindigkeit u ist, mit welcher sich ein Hilfspunkt μ auf dem um den Mittelpunkt beschriebenen Kreise bewegt. Darnach ist die Zeit, welche verfliesst, während μ den Bogen $a\varphi$ zurücklegt

$$t = \frac{a\varphi}{b}.$$

Für die nach der X-Axe vor sich gehende harmonische Bewegung bezeichnen wir die bezüglichen Grössen mit dem Index 1, für die nach der Y-Axe mit dem Index 2. Dann haben wir

$$t = \frac{a_1\varphi_1}{b_1} \text{ und } t = \frac{a_2\varphi_2}{b_2}.$$

Die Gleichsetzung der rechten Seiten giebt die Beziehung

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\frac{a_2}{b_2}}{\frac{a_1}{b_1}}.$$

Nun ist aber nach dem Princip der lebendigen Kraft, wenn wir mit p_0' und p_0'' die bez. Beschleunigungscomponenten im Anfange der Bewegung bezeichnen,

$$\frac{b_1^2}{2} = \frac{a_1 p_0'}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{a_1 p_0'}$$

$$\frac{b_2^2}{2} = \frac{a_2 p_0''}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_2 p_0''},$$

daher

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \sqrt{\frac{p_0'}{p_0''} \cdot \frac{a_2}{a_1}}.$$

Nennen wir α_1 und α_2 die beiden Winkel, unter denen die Beschleunigungsgeraden gegen die bezüglichen Axen geneigt sind, so folgt:

$$\frac{p_0'}{a_1} = tg\,\alpha_1;\; \frac{p_0''}{a_2} = tg\,\alpha_2,$$

also

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \sqrt{\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2}}.$$

Die Winkel φ_1 und φ_2 bestimmen die Kreisbögen, welche von den Hilfspunkten μ_1 und μ_2 in gleichen Zeiten durchlaufen werden.

Die Strecke vom Anfangspunkte der Bewegung bis zur Mitte wird bekanntlich die Amplitude, der Winkel gemessen durch den Bogen des Kreises das Argument, die Zeit, welche verfliesst, bis der Hilfspunkt μ den ganzen Kreis einmal durchlaufen hat, die Periode der einfachen harmonischen Bewegung genannt.

Die Phase einer einfachen harmonischen Bewegung zu irgend einer Zeit ist der Bruchtheil der ganzen Periode, welcher verstrichen ist, seitdem sich der bewegte Punkt zum letzten Male durch seine mittlere Lage nach der positiven Richtung hin bewegte.

Je nach dem Verhältniss, in welchem die Phasen und die Perioden von zwei einfachen harmonischen Bewegungen zu einander stehen, wird auch die Bahn, in welcher sich der afficirte Punkt bewegt, eine verschiedene sein.

α) **Sind die Perioden und Phasen einander gleich,** so resultirt als Bahn des bewegten Punktes eine Gerade. Die Bewegung auf dieser ist wieder eine einfache harmonische und die Amplitude derselben die Diagonale eines Parallelogrammes, dessen Seiten aus den Amplituden der einfachen harmonischen Bewegung gebildet sind.

β) **Sind die Perioden gleich, aber die Phasen um ein Viertel einer Periode gegen einander verschoben,** so ist die Bahn des bewegten Punktes im Allgemeinen eine Ellipse.

Es soll diese Bewegung im Folgenden näher untersucht werden.

Weil die Phasen um $\frac{1}{4}$ gegen einander verschoben sind, liegt der Anfangspunkt O der resultirenden Bewegung einerseits im Mittelpunkte der harmonischen Bewegung nach der Y-Axe, andrerseits im Anfangspunkte der harmonischen Bewegung nach der X-Axe.

In der Zeichnung Fig. 21, Taf. III, ist $\alpha_1 = \alpha_2$ gewählt, entsprechend der Gleichheit der Perioden, also ist auch

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Zunächst sind aus den gegebenen Beschleunigungsgeraden die Geschwindigkeitsellipsen über jeder Ordinatenaxe construirt und um deren Mittelpunkte O und A Kreise mit ihren halben grossen Axen a_1 und a_2 beschrieben.

Letztere sind als Amplituden der einfachen harmonischen Bewegung ungleich gewählt, und zwar ist

$$a_1 = 40^{mm} \quad a_2 = 30^{mm}.$$

Die beiden Kreise sind in eine gleiche Anzahl Theile getheilt, gemäss der Beziehung $\varphi_1 = \varphi_2$. Die correspondirenden Theilpunkte werden von den Hilfspunkten μ_1 und μ_2 in gleichen Zeiträumen mit den constanten Geschwindigkeiten $u_1 = b_1 = 28{,}6$, $u_2 = b_2 = 21{,}6$ passirt, welche Werthe wir der Zeichnung entnehmen. Die Rechnung würde die genauen Werthe 28,28 resp. 21,21 ergeben; die Fehler betragen also noch nicht 2 Proc. Die durch correspondirende Theilpunkte der Kreise gelegten horizontalen und verticalen Projectionsstrahlen bestimmen in ihren Schnittpunkten die Bahn.

Dass dieselbe eine Ellipse ist, lässt sich, wie folgt, beweisen:

Die Ordinaten der Bahn fallen mit den entsprechenden Ordinaten der Kreise um O und A zusammen. Da die Peripherien derselben homolog getheilt sind, so theilen die Fusspunkte der Ordinaten die Axen in zwei einander ähnlichen Punktreihen.

Wir können somit die Bahn durch Parallelprojection aus einem der beiden Kreise herleiten, folglich ist die Bahn eine Ellipse; der Winkel γ, den für diese Parallelprojection des Kreises um O die Ebene der Bahnellipse mit der Ebene des Kreises einschliessen müsste, wäre bestimmt durch die Gleichung

$$\cos \gamma = \frac{a_2}{a_1}.$$

Die Projection der constanten Geschwindigkeit u des Hilfspunktes μ_2 auf die Ebene der Bahnellipse liefert die wahre Geschwindigkeit des Punktes M auf dieser.

Der Hodograph für die Bewegung des Hilfspunktes μ_2 ist ein

Kreis um O, dessen Radius gleich der Geschwindigkeit u_2 ist. Projiciren wir denselben auf die Ebene der Bahnellipse unter dem Winkel γ, so erhalten wir offenbar den Hodographen für die Bewegung des Punktes M auf der Bahnellipse.

Der Hodograph ist demnach ebenfalls eine Ellipse und zwar sind, wie ohne Weiteres einzusehen, die Hauptaxen des Hodographen die kleinen Axen der Geschwindigkeitsellipsen. —

Die elliptische Bewegung des Punktes M hat noch eine sehr interessante Eigenschaft, die der Beachtung werth erscheint. Bestimmen wir nämlich die Richtung der Resultante der beschleunigenden Kräfte, so finden wir, dass dieselbe in allen Lagen, die der Punkt M einnimmt, durch den Mittelpunkt A geht; denn nennen wir die Ordinaten des Punktes M in Bezug auf A als Ordinatenmittelpunkt x, y, die zugehörigen Beschleunigungen p_1 und p_2, so ist

$$\frac{p_1}{x} = \frac{p_2}{y},$$

also

$$\frac{x}{y} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Der Punkt M bewegt sich gerade so, als wenn er unter dem Einflusse einer Centralkraft stände.

In der Zeichnung ist noch die dynamische Construction des Krümmungsradius ausgeführt:

Es ist in M die Geschwindigkeit v (als Strahl dem Hodographen entnommen) der Grösse und Richtung nach aufgetragen, ferner senkrecht darauf die Normalcomponente p_n der resultirenden Beschleunigung. Auf der Verbindungslinie der Endpunkte von p_n und v ist in letzterem eine Senkrechte errichtet, welche auf der Normalen zur Bahn den Krümmungsmittelpunkt bestimmt. Um nachzuweisen, wie genau diese Construction ist, ist andrerseits vom Brennpunkte F aus auf bekannte geometrische Art der Krümmungsmittelpunkt construirt. Beide Constructionen decken sich beinahe vollständig. —

Die elliptische Bewegung des Punktes M geht im speciellen Falle in eine kreisförmige über, wenn die Amplituden gleich gross sind. Da dann auch die Geschwindigkeitsellipsen gleich gross

sind, so ist der Hodograph ein Kreis, also die Geschwindigkeit v, mit welcher sich der Punkt M bewegt, constant.

γ) **Die Phasen sind gleich, die Perioden ungleich.** Fällt der Anfangspunkt der resultirenden Bewegung mit den Anfangspunkten der beiden Einzelbewegungen zusammen und stehen die Perioden im rationellen Verhältniss zu einander, so ist die Bahn keine geschlossene Curve. Es existiren auf ihr Rückkehrpunkte der Bewegung.

Der einfachste Fall ist in Fig. 22 behandelt. In derselben ist, entsprechend der Ungleichheit der Perioden, das Verhältniss

$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{1}{4},$$

daher

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

gewählt. Der Punkt M durchläuft eine Parabel.

Ist der Punkt M von O durch C nach D gelangt, so findet in D eine Umkehr der Bewegung statt. Der Hodographenstrahl ist in diesem Momente Null, ebenso auch seine Winkelgeschwindigkeit. Daher ist der Krümmungsradius der Bahn in D, $\varrho = \frac{v}{\frac{d\tau}{d\tau}} = \frac{o}{o}$, also unbestimmt, d. h. die dynamischen Beziehungen geben keinen bestimmten Werth (vergl. §. 19).

Der Hodograph hat die Gestalt einer flachgedrückten „acht“. Dreht man denselben um die im obern Quadranten rechts durch O unter 45° gezogene Gerade, so gelangt der Strahl Om in die richtige Lage zur Bahn. Parallel demselben geht die in dem entsprechenden Punkte M an die Bahn gezogene Tangente. In der Zeichnung ist ausser dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten in M auch das Parallelogramm der Beschleunigungen gebildet. Die Diagonale des letzteren geht, wie dies aus der Zeichnung zu ersehen ist, parallel der Tangente an den Hodographen in m.

In Fig. 23, Taf. III, stehen die Perioden zu einander ebenfalls in einem rationellen Verhältniss, die resultirende Bewegung nimmt aber nicht vom Anfangspunkte beider Amplituden, sondern nur von dem Anfangspunkte der einen Amplitude und von einem

beliebigen Punkte der andern ihren Anfang. Demzufolge erscheint die Bahn des Punktes als geschlossene Curve von schleifenförmiger Gestalt. Es beginnt der Punkt M erst seine Bewegung nach der Y-Axe im positiven Sinne, wenn er nach der X-Axe bereits $\frac{1}{12}$ der ganzen Periode zurückgelegt hat. Auch hier ist $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{1}{2}$ gewählt. Eine ähnliche schleifenförmige Curve, nur viel gestreckter, ist auch der Hodograph.

Verfolgen wir die Bewegung des Hodographenstrahls etwa von Om aus, so bemerken wir, dass in dem Augenblick, wo der Strahl die Hodographencurve tangirt, seine Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\tau}{dt}$ gleich Null ist. Der Tangirungspunkt n ist in der Zeichnung hinlänglich genau zu markiren.

Suchen wir nun den Punkt W der Bahn auf, welcher diesem Tangirungspunkte n entspricht (und dies geschieht mittelst des Linienzuges $n\,n_2\,W$) so muss W ein Wendepunkt der Bahn sein. Denn für diesen Punkt ist $\frac{d\tau}{dt} = \frac{v}{\varrho} = 0$, also der Krümmungsradius ϱ unendlich.

δ) **Es sind sowohl die Phasen als die Perioden ungleich.**

In der Fig. 24, Taf. III, beträgt die Phasendifferenz $\frac{1}{4}$ der Periode, d. h. in dem Augenblick, wo der Punkt M nach der X-Axe sich vom Anfangspunkte der Amplitude a_1 im positiven Sinne bewegt, passirt er nach der Y-Axe die Mitte der Amplitude a_2 ebenfalls im positiven Sinne. Demgemäss deckt sich in der Figur der Anfangspunkt der einen Amplitude mit dem Mittelpunkte der andern und beide bilden den Ausgangspunkt der Bewegung.

Es ist $\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{4}{9}$ gewählt.

Das Verhältniss der Argumente ist hiernach

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3},$$

d. h. die Bogenlängen der beiden Kreise, welche die correspondirenden Theilpunkte geben, verhalten sich wie 2 zu 3.

Die Bahn ist eine nicht geschlossene Curve, aber symmetrisch zur X-Axe. Die Endpunkte C und E sind Rückkehrpunkte der Bewegung. Die entsprechenden Punkte des Hodographen fallen in dessen Mittelpunkt, was stattfinden muss, da in dem Augenblick der Umkehr der Bewegung die Geschwindigkeit $v = 0$ ist.

Der Hodograph erscheint als eine doppelflügelartige, sowohl gegen die X- als Y-Axe symmetrisch liegende Curve. Eine Drehung um 90° würde ihn in die richtige Lage zur Bahn bringen. Aber schon seine durch die Construction erhaltene Lage setzt uns in den Stand, folgende Fragen zu beantworten:

Wo sind die Stellen der Bahn, in welchen der Punkt M die grösste Geschwindigkeit besitzt?

Wir suchen im Hodographen die Punkte d auf, welche den weitesten Abstand vom Mittelpunkt haben. Es giebt deren vier.

Projiciren wir diese Punkte d ebenso, wie wir sie erhalten haben, wieder auf eine der beiden Geschwindigkeitsellipsen, z. B. d nach d_1 und den Ellipsenpunkt d_1 auf die Bahn, so finden wir die Stelle d_2, in welcher der Punkt M eine Maximalgeschwindigkeit besitzt. Die Richtung der Geschwindigkeit, also auch die Tangente an die Bahn in d_2, steht senkrecht auf dem Hodographenstrahl Od. Der zweite ausgezeichnete oberhalb der X-Axe gelegene Hodographenpunkt d, gelangt durch die angedeutete doppelte Projection ebenfalls nach d_2; die beiden andern unterhalb der X-Axe gelegenen Hodographenpunkte indessen nach d_2'.

Wegen der Symmetrie der Bewegung gegen die X-Axe liegt d_2' senkrecht unter d_2 in demselben Abstande und sind die an den Stellen d_2 und d_2' auftretenden vier Maximalgeschwindigkeiten einander gleich, entsprechend den vier unter sich gleich langen Hodographenstrahlen Od.

Je zwei derselben sind entgegengesetzt gerichtet, entsprechend der rückläufigen Bewegung des Punktes M.

Bei der Projection der Hodographenpunkte kann es vorkommen, und solch ein Fall liegt hier vor, dass die projicirenden

Linien die bezüglichen Geschwindigkeitscurven in mehr als einem Punkte schneiden. Es ist dann zweifelhaft, welchen Punkt man auf die Bahn zu projiciren hat. Hierüber entscheidet die Thatsache, dass die in dem bezüglichen Punkte an die Bahn gezogene Tangente senkrecht auf dem Hodographenstrahl stehen oder im Allgemeinen diesem entsprechen muss.

Ausser den vier Punkten d im Hodographen haben relativ auch noch die zwei Punkte e einen grössten Abstand von O. O ist der Projectionspunkt von e auf der Geschwindigkeitsellipse, resp. der Bahn, mithin finden auch hier zwei Maximalgeschwindigkeiten statt und zwar gleiche und entgegengesetzte.

Ganz analog beantworten wir die zweite Frage:

Wo sind die Stellen der Bahn, in denen der Punkt M eine Minimalgeschwindigkeit besitzt?

Zunächst ist der Mittelpunkt O selbst solch ein ausgezeichneter Punkt des Hodographen. Demselben entsprechen die Rückkehrpunkte C und E der Bahn, wo die Bahngeschwindigkeiten des Punktes Null sind. Vier messbare und einander gleiche Minimalgeschwindigkeiten haben wir in den Strahlen Oc des Hodographen. Denn die Punkte c haben vom Mittelpunkte O den kleinsten Abstand. Projiciren wir diese Punkte c auf eine der beiden Geschwindigkeitsellipsen und von hier auf die Bahn, so erhalten wir zwei Stellen, in denen der Punkt M eine Minimalgeschwindigkeit besitzt. Die Grösse derselben ist durch den Hodographenstrahl Oc gegeben.

Dynamische Construction des Krümmungsradius.

An der beliebig gewählten Stelle M der Bahn ist in der Figur das Parallelogramm der Geschwindigkeiten verzeichnet, ebenso auch dasjenige der Beschleunigungen. Die Diagonale des letzteren muss auch hier selbstverständlich auf der im entsprechenden Punkte m des nicht gedrehten Hodographen gezogenen Tangente senkrecht stehen.

Indem wir in M die Beschleunigungscomponenten im richtigen Sinne antragen, erhalten wir die effective Beschleunigung p der Grösse und Richtung nach.

Construiren wir nun die Normalcomponente p_n, so ist mittelst der Beziehung $p_n = \frac{v^2}{\varrho}$ der Krümmungsradius ϱ ebenfalls constructiv zu ermitteln.

Die Grösse der in M tangential angetragenen Geschwindigkeit v entnehmen wir dem Hodographen. Verbinden wir nun die Endpunkte von p_n und v und errichten in letzterem auf dieser Verbindungslinie eine Senkrechte, so bestimmt diese auf der Normalen den Krümmungsradius $MF = \varrho$.

4) Zusammensetzung hyperbolischer Bewegungen.

§. 28. An die Untersuchung über die Zusammensetzung einfacher harmonischer Bewegungen, die hinsichtlich der dabei auftretenden Geschwindigkeitsellipsen auch elliptische Bewegungen (im engern Sinne) genannt werden könnten, müssten sich naturgemäss die Untersuchungen anschliessen, die sich durch die Zusammensetzung einfacher Bewegungen dritter Art ergeben; wir meinen die Bewegungen, bei welchen die Geschwindigkeitscurven Hyperbeln sind und die man, mit Bezug hierauf, analog hyperbolische Bewegungen nennen könnte (vergl. §. 15).

Allein wir ziehen es vor, die Zusammensetzung dieser Bewegungen auf sich beruhen zu lassen, aus zwei Gründen:

a) Es haben die daraus resultirenden Bewegungen durchaus nicht das Interesse, wie die resultirenden harmonischen Bewegungen, weil sie in der Natur nicht vorkommen.

b) Es existiren keine einfach zu construirenden Zeitcurven. Die Stellen, nach denen die Projectionen des bewegten Punktes nach gleichen Zeiten gelangen, ergeben sich freilich durch Construction gleich grosser Flächen, welche von den bezüglichen Mittelpunktsstrahlen der Geschwindigkeitshyperbeln bestrichen werden (vergl. §. 13). So fasslich indess dieser Satz geometrisch erscheint, so wenig ist er geeignet, zu interessanten Folgerungen Veranlassung zu geben.

Wir gehen daher weiter und untersuchen

5) Das Problem des Zusammentreffens zweier Körper auf krummer Bahn.

§. 29. Dasselbe lässt sich ganz analog, wie das entsprechende für gerade Bahnen, auf graphische Weise, wie folgt, lösen.

Wir setzen voraus: Für zwei krummlinige Bewegungen seien aus dem Gesetz für die Componenten der beschleunigenden Kräfte die Geschwindigkeitscurven, aus diesen die Zeitcurven und die Bahnen construirt. Die um gleiche Bogenlängen der Zeitcurven entfernten Theilpunkte bestimmen auf jeder Bahn die Stellen, welche von dem bezüglichen Punkte nach gleichen Zeiträumen passirt werden.

Hiernach können wir beurtheilen, ob ein Zusammenstoss erfolgt, oder nicht. Wird ein solcher verlangt, so kann man umgekehrt gewisse Elemente, welche Einfluss auf die Gestalt der Bahn und auf die Zeit haben, während welcher eine bestimmte Strecke derselben zurückgelegt wird, zeichnerisch bestimmen.

Wir verzichten auf eine eingehendere Behandlung dieses allgemeinen Problems, weil ein solches die Praxis kaum bieten dürfte.

Wohl aber erscheint es lohnend, das Problem ein wenig zu specialisiren und folgende Aufgabe zu behandeln:

§. 30. **Aufgabe.***)

Ein Körper M bewegt sich mit veränderlicher Geschwindigkeit auf gerader Bahn. Das Geschwindigkeitsgesetz ist durch eine Curve gegeben, deren Anfangsordinate die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2^m$ pro Sec. darstellt (s. Fig. 25, Taf. III). Der zurückgelegte Weg AB sei $x = 8000^m$. In C senkrecht um $h = 200^m$ über dem Punkte B steht ein Geschütz, dessen Neigungswinkel gegen die Horizontale $\varphi = 30^0$ beträgt. Die Kugel verlässt das Rohr mit einer Anfangsgeschwindigkeit $w_0 = 150^m$ pro Sec. Der Körper M verlasse den Punkt A um 6 Uhr. Wann muss in C das Geschütz abgefeuert werden, damit die Kugel den Körper M trifft?

*) Es sind auch hier numerische Werthe gegeben, um das Construiren mit reducirten Grössen möglichst klar zu legen.

Wir bestimmen zuerst die Zeit, welche verfliesst, während der Körper M von A nach B gelangt. Die Anwendung der graphischen Methoden verlangt geeignete Massstäbe, in denen wir die Geschwindigkeiten und Wege messen.

Wir wählen mit Bezug auf die in C) Kapitel I), §. 10 gewählten Bezeichnungen die Reductionsgrössen für die Maasse

$$\beta = \frac{1}{100000}, \quad \gamma = \frac{1}{100},$$

$$\text{also } x' = \beta x = 80^{mm},$$

$$v_0' = \gamma v_0 = 20^{mm}.$$

Ferner wählen wir, behufs Construction der Zeitcurve EFG, die Geschwindigkeitsstrecke $u = 20^{mm}$, die Rectification der Zeitcurve von E bis G giebt den Werth

$$\sigma' = 103{,}5^{mm},$$

mithin folgt $t' = \frac{\sigma'}{u} = \frac{103{,}5}{20} = 5{,}175''.$

Zur Ermittelung der wahren Zeit t benutzen wir die Reductionsformel (§. 10).

$$t = \frac{\gamma}{\beta} \cdot t' = \frac{100000}{100} \cdot 5{,}175,$$

$$t = 5175 \text{ Sec.}$$

$$\text{oder } t = 1 \text{ Stunde } 26 \text{ Min. } 15 \text{ Sec.}$$

Der Körper gelangt also

um 7 Uhr 26 Min. 15 Sec. in B an.

Zur Ermittelung der Zeit, welche von der Lösung des Geschützes bis zum Aufschlagen der Kugel verfliesst, könnten wir graphisch nach den unter 1) a) in diesem Abschnitte aufgestellten Regeln verfahren. Weil nun aber zweckmässig die Höhe h in demselben Massstabe aufgetragen werden müsste, als der Weg x, um in dem Schnittpunkte der Wurfparabel mit AB den Treffpunkt zu erhalten, die reducirte Grösse h' aber in der Zeichnung nur 2 Millimeter betragen und in Folge dessen die Construction ungenau ausfallen würde, so wollen wir den Weg der Rechnung einschlagen, der gerade, wie früher schon bemerkt, beim Wurfproblem oft schneller zum Ziel führt, als die graphische Construction.

Die verticale Anfangsgeschwindigkeit der abgeschossenen Kugel ist

$$w_{02} = w_0 \sin 30^0 = 75^m \text{ pro Sec.},$$

also beträgt die Zeit, welche verfliesst, während die Kugel bis zum Scheitel der Parabel aufsteigt,

$$t_0 = \frac{w_{02}}{g} = \frac{75}{9{,}81}.$$

Die verticale Endgeschwindigkeit, mit welcher die Kugel den Körper M trifft, sei w_2. Dieselbe bestimmt sich aus der Gleichung der lebendigen Kraft

$$w_2^2 - w_{02}^2 = 2gh,$$

$$w_2 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 200 + 75^2} = 97{,}7.$$

Mithin folgt die Zeit, in welcher die Kugel vom Scheitel der Parabel bis zur Horizontalen AB gelangt,

$$t_1 = \frac{w_2}{g} = \frac{97{,}7}{9{,}81},$$

also die Gesammtzeit

$$t = t_0 + t_1 = \frac{75}{9{,}81} + \frac{97{,}7}{9{,}81} = 17{,}6''.$$

Die horizontale Geschwindigkeitscomponente ist in jedem Punkte der Parabel gleich gross. Während die Kugel die Parabel durchläuft, legt die Horizontalprojection derselben in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück, mithin ist die Entfernung a des Treffpunktes T von B

$$a = w_{01}\, t = w_0 \cos 30^0 \cdot 17{,}6$$

$$a = 2288^m.$$

In diesem Abstande von B trifft die Kugel den Körper M.

Im reducirten Massstabe beträgt die Strecke $TB = 22{,}88^{mm}$.

Legen wir nun durch T eine Verticale, so wird die Zeitcurve EG in P geschnitten. Rectificiren wir das Stück EF der Zeitcurve, so erhalten wir

$$arc\, EF = \sigma_1 = 75{,}5.$$

Die Zeit, welche verfliesst, während der Körper M die Strecke AT zurücklegt, ist somit

$$\frac{75{,}5}{103{,}5} \cdot 5175'' = 3775''.$$

Ziehen wir hiervon noch die Schiesszeit von 17,6" ab, so erhalten wir den Werth

$$t = 3757{,}4''$$

oder $t = 1^0\ 2'\ 37''$,
daraus folgt nun, dass um

7 Uhr 2 Min. 37 Sec.

das Geschütz in C gelöst werden muss, damit der auf vorgeschriebene Weise sich bewegende Körper M getroffen wird.

Zweiter Fall.

Die Aenderung der beschleunigenden Kraft ist durch die Aenderung ihrer Componenten tangential und normal zur Bahn gegeben.

§. 31. Bezeichnen wir mit K die im Allgemeinen unter irgend einem Winkel gegen die Bahn des bewegten Punktes M gerichtete und nach Grösse und Richtung veränderliche Kraft, mit T und N ihre Componenten tangential und normal zur Bahn, so ist bekanntlich

$$K = \sqrt{T^2 + N^2}$$

$$T = M\,\frac{dv}{dt};\ N = M\,.\,\frac{v^2}{\varrho}.$$

Die Tangentialkraft T variirt die Geschwindigkeit v stets nur in ihrer eigenen Richtung, während die Normalkraft N die Krümmung der Bahn bestimmt.

Wir nehmen nun für die Folge an, die tangential und normal beschleunigende Kraft pro Masseneinheit sei als Function des Winkels gegeben, welchen die Tangente resp. die Normale der zu construirenden Bahn mit einer festen X-Axe bildet (vergl. Fig. 26a, Taf. IV). Nennen wir diesen Winkel φ resp. φ_1, so soll

$$\left.\begin{aligned}\frac{T}{M} &= f(\varphi) = p_t\\ \frac{N}{M} &= f_1(\varphi_1) = p_n\end{aligned}\right\}\ \text{gegeben sein.}$$

Zwischen φ und φ_1 besteht die Beziehung

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Die Gleichungen für p_t und p_n stellen zwei polare Curven dar, zu deren Verzeichnung wir einen beliebigen festliegenden

Punkt O der Ebene wählen. Wegen der Abhängigkeit der Winkel φ und φ_1 entspricht jedem Strahl OC der einen Curve $p_t = f(\varphi)$ ein Strahl OB der andern Curve $p_n = f_1(\varphi_1)$, und beide schliessen mit einander einen Winkel von 90^0 ein.

Bilden wir aus beiden Strahlen ein Rechteck, so erhalten wir in der Diagonale desselben einen dritten Strahl OA, der der Grösse und Richtung nach die beschleunigende Effectivkraft pro Masseneinheit $\frac{K}{M} = p$ darstellt.

Die Endpunkte sämmtlicher so erhaltenen Strahlen OA liegen auf einer dritten Curve, die durch das Symbol $p = F(\psi)$ gekennzeichnet sein mag.

In diesen drei Curven

$$p_t = f(\varphi),\ p_n = f_1(\varphi_1) \text{ und } p = F(\psi)$$

haben wir die Elemente, welche, sobald uns noch die Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gegeben ist, die Bewegung und die Bahn des Punktes M eindeutig bestimmen.

Was nun zunächst das Geschwindigkeitsgesetz anbetrifft, nach welchem sich der Punkt M bewegt, so stellen wir dasselbe auch hier durch den Hodographen dar, dessen Mittelpunkt der Punkt O ist. Die Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 wird als Strahl Oa angetragen.

Für die graphische Construction des Hodographen ist es ganz beliebig, wie man die X-Axe durch O legt. Es ist in der Zeichnung (Fig. 26_a, Taf. IV) die X-Axe in den Anfangsstrahl $Oa = v_0$ gelegt.

In Bezug auf die Construction des Hodographen, der vom Punkte a beginnt, ist das zu beachten, was wir vorhin anführten, dass nämlich die Tangentialkraft T die Geschwindigkeit stets nur in ihrer eigenen Richtung verändert, d. h. die Richtung der Geschwindigkeitszunahme fällt in die Richtung der Tangential-Beschleunigungen, oder mit andern Worten, die Strahlen des Hodographen und der Beschleunigungscurve $p_t = f(\varphi)$ decken einander. Beide sind einander entsprechende Strahlen. Da nun jedem Strahl p_t ein Strahl p (resultirende Beschleunigung) entspricht, so entspricht letzterem auch ein Hodographenstrahl und

der Winkel γ, den beide mit einander einschliessen, ist dem Winkel zwischen p_t und p gleich.

Es ist im Anfange dieses Kapitels unter „Construction und Eigenschaften des Hodographen“ §. 19 nachgewiesen, dass die Geschwindigkeit w des entsprechenden Punktes m auf dem Hodographen der Grösse und Richtung nach gleich der effectiven Beschleunigung p ist. Die Richtung der Geschwindigkeit w bestimmt die Richtung des Bogenelementes. Da wir nun jedem Hodographenstrahl v einen Strahl p zuweisen können, so können wir die Hodographencurve durch ihre Bogenelemente construiren, indem wir von Strahl zu Strahl der Curve $p_t = f(\varphi)$ Parallelen zu den entsprechenden Strahlen der effectiven Beschleunigungscurve $p = F(\psi)$ ziehen. Auf den ersten Blick mag die Construction der Hodographencurve durch Aneinandersetzen ihrer Bogenelemente unsicher erscheinen. Dies ist aber keineswegs der Fall. Mit Beachtung der folgenden Anleitung ist die Construction ebenso sicher und genau als die Construction der Geschwindigkeitscurve bei der geradlinigen Bewegung.

Construction des Hodographen, der Bahn, des Krümmungsradius und der lebendigen Kraft.

§. 32. Aus den vorangegangenen Betrachtungen resümiren wir noch einmal die Thatsache, dass vier Strahlen als einander entsprechende, wie folgt, bezeichnet werden sollen.

Der Strahl der Curve $p_t = f(\varphi)$ Tangentialstrahl genannt, der hinsichtlich der Richtung mit ihm zusammenfallende Hodographenstrahl, der senkrecht auf diesem stehende Strahl der Curve $p_n = f_1(\varphi_1)$, Normalstrahl genannt, und der Strahl der Curve $p = F(\psi)$, resultirender Strahl genannt. Diese je vier einander entsprechenden Strahlen, welche in grösserer Zahl auf einander folgen, sollen in der Zeichnung mit gleichen Ziffern versehen sein. Der Anfangsstrahl des Hodographen hat die Ziffer 1.

Zum Verzeichnen des Hodographen nehmen wir (Fig. 26_a, Taf. IV) den Abstand des Punktes a (Endpunkt des Hodographenstrahls) vom resultirenden Strahl O_1 in den Zirkel und

markiren, indem wir den Zirkel parallel diesem verschieben, den Punkt *b* (Endpunkt des zweiten Hodographenstrahls) am zweckmässigsten zwischen den Strahlen O_1 und O_2. Dann erweitern wir den Zirkel, bis wir den Abstand des Punktes *b* vom resultirenden Strahl O_2 in den Zirkel bekommen, verschieben letzteren parallel sich selbst längs O_2 und markiren den Punkt *c* (Endpunkt des dritten Hodographenstrahls) zwischen den Strahlen O_2 und O_3. In dieser Weise fortfahrend erhalten wir, vorausgesetzt, dass die Strahlen genügend eng auf einander folgen, verhältnissmässig genau den Hodographen.

Das Markiren der Zirkelstiche **zwischen** den Polarstrahlen ist nothwendig, um den beim Zeichnen entstehenden Fehler möglichst zum Verschwinden zu bringen. Durch zwei auf einander folgende Zirkelstriche ist die Grösse und Richtung des Bogenelementes des Hodographen bestimmt. Nach der Mitte desselben geht der zugehörige Strahl und die im Endpunkte des letzteren parallel dem entsprechenden resultirenden Strahl gezogene Tangente nimmt das Bogenelement ganz in sich auf.

Würden wir die Zirkelstiche auf den Strahlen selbst einsetzen, so wäre eine einseitige Abweichung des Bogenelementes von der Tangente vorhanden.

In Bezug auf die Geschwindigkeit w, mit welcher sich der dem bewegten Punkte M entsprechende Punkt m auf dem Hodographen bewegt, haben wir die Beziehung $w = p$. Eine durch den Endpunkt A des Strahls p parallel dem entsprechenden Hodographenstrahl Qm gezogene Linie schneidet auf der Tangente an den Hodographen die Geschwindigkeit w ab.

Indem wir diese Geschwindigkeiten w auf dem rectificirten Hodographenbogen als Ordinaten auftragen, können wir die Zeitcurve construiren (vergl. Kapitel I) B) §. 8), also auch die Zeit bestimmen, während welcher vom Punkte m ein bestimmter Bogen des Hodographen, resp. vom bewegten Punkte M, eine bestimmte Strecke seiner Bahn zurückgelegt wird.

Was nun die **graphische Construction der Bahn** anbelangt, welche der Punkt M in Folge der auf ihn wirkenden Kräfte verfolgt, so können wir zunächst mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{N}{M} = p_n = \frac{v^2}{\varrho}$$

den Krümmungsradius ϱ construiren. Es ist v die mittlere Proportionale zwischen p_n und ϱ; da nun die beiden Strahlen, welche in der Zeichnung die Grössen p_n und v darstellen, auf einander senkrecht stehen, so finden wir ϱ als Strahl OD auf der Verlängerung von p_n jenseits O mittelst des rechtwinkeligen Linienzuges BmD.

Indem wir diese Construction für eine grössere Anzahl einander entsprechender Punkte wiederholen, erhalten wir eine neue Curve, deren Gleichung

$$\varrho = f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

sei, und deren Fahrstrahlen die Krümmungsradien der zu construirenden Bahn sind.

Es mag mühsam erscheinen, die Construction der Werthe ϱ in der angegebenen Weise vorzunehmen. Es ist dies aber keineswegs der Fall, wenn man sich eines rechtwinkeligen Dreiecks bedient, das im Scheitelpunkte mit einer Nadelspitze versehen ist. Diese Nadelspitze ist nicht fest, sondern an einem drehbaren Arm befestigt, so dass man die Spitze, wie es die Breite der Ziehfeder oder des Bleistiftes verlangt, genau in die richtige Fluchtlinie beider Schenkel stellen kann. Indem man die Spitze nach einander in die Hodographenpunkte einsetzt und das Dreieck so dreht, dass der eine Schenkel durch den Endpunkt des entsprechenden Strahls p_n geht, bestimmt die längs dem andern Schenkel gezogene Linie auf der Verlängerung von p_n jenseits O den Punkt D.

Um die Bahn construiren zu können, muss zu den gegebenen Elementen noch die Anfangslage M_0 des Punktes M hinzukommen. Es sei dieselbe gegeben.

Wir ziehen durch M_0 (Fig. 26_b, Taf. IV) parallel dem entsprechenden (d. h. ersten) Krümmungsradius ϱ_0 in Fig. 26_a eine Linie, welche denselben Richtungssinn hat, als die Normalcomponente p_n und machen $M_0 G = \varrho_0$.

Von G an verzeichnen wir nun in einem Sinne, der sich von M_0 nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn erstreckt, eine

Curve, deren aneinandergereihte Bogenelemente gleich und parallel den bezüglichen Differenzen $\triangle \varrho$ der auf einander folgenden Krümmungsradien sind. Die so erhaltene Curve ist offenbar die Evolute der gesuchten Bahn, und wir erhalten die letztere, wenn wir von jener die Evolvente bilden. Die gestellte Aufgabe ist hiermit zeichnerisch gelöst.

Wie bei der geradlinigen Bewegung können wir auch hier nach der lebendigen Kraft fragen, die während einer gewissen Wegstrecke in der bewegten Masse M angesammelt wird. Da der Angriffspunkt der tangential beschleunigenden Kraft eine gleiche Geschwindigkeitsrichtung besitzt, also allein nur Arbeit verrichtet, so ist

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_0^s p_t \, ds.$$

ds ist das Bogenelement der Bahn. Im Anfangspunkte der betrachteten Bewegung sei die Geschwindigkeit v_0; nachdem die Wegstrecke s zurückgelegt ist, sei sie v. Der Ausdruck links ist unmittelbar zu bestimmen, da die Grössen v und v_0 der Zeichnung entnommen werden können.

Was das Integral betrifft, so können wir $ds = \varrho \, d\varphi$ setzen und erhalten

$$\int_0^s p_t \, ds = \int_0^s p_t \varrho \, d\varphi.$$

Ist nun $\left.\begin{array}{l} \varrho = f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ \text{und } p_t = f(\varphi) \end{array}\right\}$ bekannt, so könnte man das Integral durch Rechnung bestimmen und dadurch die Construction hinsichtlich ihrer Genauigkeit prüfen.

Wir können aber auch das Integral in der Zeichnung durch eine Fläche darstellen.

Zu dem Ende denken wir uns die Curve $p_t = f(\varphi)$ um 90° gedreht, so dass p_t in eine Gerade mit ϱ zu liegen kommt, sich aber vom Mittelpunkte aus nach entgegengesetzter Richtung erstreckt. Ein über der Strecke $p_t + \varrho$ beschriebener Kreis schneidet auf der Senkrechten in O eine Strecke l ab und zwar ist

$$l^2 = p_t \cdot \varrho.$$

Der Strahl l nimmt in Bezug auf den Polarwinkel φ die richtige Lage ein. Es ist demnach in

$$p_t . \varrho d\varphi = l^2 d\varphi$$

$l^2 d\varphi$ der doppelte Flächeninhalt des elementaren Sectors, welchen der Fahrstrahl l beschreibt, während φ um $d\varphi$ zunimmt; also

$$\int l^2 d\varphi = 2\mathrm{F}$$

gleich dem doppelten Inhalte des Sectors, welcher den Winkel φ fasst.

Unsere allgemeine Gleichung

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2.} = \int_0^s p_t ds$$

geht somit über in

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = 2F,$$

d. h. die lebendige Kraft ist proportional dem vom Strahl l der Curve $l = F_1(\varphi)$ bestrichenen Sector.

Specialfälle.

§. 33. a) Es sei $p_n = 0$, dann fällt die Resultante p der Grösse und Richtung nach mit der Tangentialcomponente p_t zusammen.

Der Hodograph wird eine gerade Linie, auf welcher sich der entsprechende Punkt m mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche in jedem Augenblicke gleich p_t ist. Die Fahrstrahlen der Curve

$$\varrho = f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

sind sämmtlich unendlich lang und fallen in eine Gerade, die senkrecht auf dem Hodographen steht. Demnach ist die Evolute der gesuchten Bahn ein in der Unendlichkeit liegender Punkt und die Bahn selbst eine Gerade, welche parallel dem Hodographen geht.

Hiermit ist der vorliegende Fall auf eine geradlinige Bewegung zurückgeführt, die nach den im Kapitel I gegebenen Methoden zu behandeln ist.

b) Es sei $p_t = 0$. Dann ist die resultirende Beschleunigung der Grösse und Richtung nach gleich der Normalbeschleunigung p_n.

Der Hodograph ist ein Kreis vom Radius v_0, auf welchem der Punkt m mit einer im Allgemeinen variabeln Geschwindigkeit läuft, je nachdem sich p_n mit dem Winkel φ_1 ändert. In dem besonderen Falle, dass p_n constant ist, ist die Curve $\varrho = f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ ebenfalls ein Kreis, derselbe ist aber gleichzeitig auch die Bahn, da die Evolute der Mittelpunkt ist.

c) Es sei p_n constant und p_t constant. Dann ist auch die Resultante p constant und selbige bildet mit dem Strahl p_t den constanten Winkel γ. Darnach schliesst auch das Bogenelement des Hodographen in allen Lagen mit dem zugehörigen Strahl einen constanten Winkel γ ein.

Somit ist der Hodograph eine logarithmische Spirale, deren Gleichung

$$v = v_0 e^{m\varphi}$$

lautet.

Hierin ist $m = cotg\,\gamma$ und der Winkel φ von dem Anfangsstrahl v_0 des Hodographen gerechnet.

Denn für $\varphi = 0$ ist $v = v_0$.

Die Curve $\varrho = f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ ist ebenfalls eine logarithmische Spirale, deren Gleichung sich folgendermassen herleiten lässt:

Setzen wir in die Gleichung

$$\varrho = \frac{v^2}{p_n}$$

den Werth für v ein, so folgt:

$$\varrho = \frac{v^2}{p_n} = \frac{v_0^2 e^{2m\varphi}}{p_n}.$$

Bezeichnen wir den Anfangsradius mit ϱ_0, so ist

$$\varrho_0 = \frac{v_0^2}{p_n},$$

$$\text{also } \varrho = \varrho_0 e^{2m\varphi}.$$

Wir haben angenommen, dass der Winkel φ in demselben Sinne wächst, als der Hodographenstrahl sich dreht. Bezeichnen

wir den im gleichen Sinne wachsenden zu ϱ gehörigen Polarwinkel (ebenfalls von v_0 an) mit χ, so folgt

$$\chi = \frac{3\pi}{2} + \varphi, \text{ somit } \varphi = \chi - \frac{3\pi}{2},$$

$$\varrho = \varrho_0 e^{2m\chi - 3m\pi}$$

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{e^{3m\pi}} \cdot e^{2m\chi}$$

ebenfalls die Gleichung einer logarithmischen Spirale.

Was sich bis hierher rechnerisch verfolgen liess, ist nach der allgemeinen Methode in Fig. 27_a, Taf. IV, constructiv ausgeführt. In Fig. 27_b ist die Evolute verzeichnet, deren Abwickelung die Bahn giebt.

Um die Genauigkeit der Construction zu prüfen, die scheinbar durch den Umstand, dass die einzelnen Curven durch Aneinandersetzen ihrer Bogenelemente entstehen, sehr leidet, wollen wir aus dem Princip der lebendigen Kraft noch einige für den vorliegenden Fall recht interessante Folgerungen ziehen, und diese zu passenden Vergleichen benutzen.

In der allgemeinen Gleichung

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int p_t \, ds$$

ist für unsern Fall p_t eine constante Grösse.

Ferner setzen wir auf Grund der Beziehung $p_n = \frac{v^2}{\varrho}$, $p_n = \frac{v_0^2}{\varrho_0}$. Wir erhalten:

$$v^2 - v_0^2 = p_n \, (\varrho - \varrho_0),$$

$$\text{also } (\varrho - \varrho_0) \, \frac{p_n}{2} = p_t \int ds$$

$$(\varrho - \varrho_0) \, \frac{p_n}{2} = p_t \, (s + C).$$

Für $\varrho = \varrho_0$ sei $s = 0$, d. h. wir messen den Bogen s der Bahn vom Anfangspunkte der Bewegung. Dann ist $C = 0$, mithin

$$\frac{(\varrho - \varrho_0)}{2} \, \frac{p_n}{p_t} = s.$$

Diese interessante Beziehung, welche feststellt, dass der vom

bewegten Punkte M zurückgelegte Bogen seiner Bahn proportional der Differenz der zu den Endpunkten gehörigen Krümmungsradien ist, benutzen wir als Controle für die Genauigkeit der Zeichnung. Es misst beispielsweise in der Fig. 27_b, Taf. IV, der Bogen $M_0 M M_1$ $s = 74^{mm}$, ferner ist nach Fig. 27_a, $\varrho - \varrho_0 = OF - OE = 37{,}5^{mm}$, und der Werth $\frac{p_n}{p_t} = 4$. Darnach ist

$$\left(\frac{\varrho - \varrho_0}{2}\right) \frac{p_n}{p_t} = 75.$$

Die Abweichung beträgt $\frac{1}{75} = 1{,}33$ Proc., ist also eine sehr geringe.

Einen zweiten Vergleich bietet die Beziehung

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{p_n}{2} (\varrho - \varrho_0),$$

wonach der Zuwachs an lebendiger Kraft proportional der Differenz $\varrho - \varrho_0$ ist.

Die der Zeichnung entnommenen Grössen betragen, Fig. 27_a

$$v_0 = OL = 33^{mm}$$
$$v = ON = 46{,}8^{mm},$$

somit ist

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = 550{,}5.$$

Dagegen ist

$$p_n = 29{,}5. \quad \varrho - \varrho_0 = 37{,}5,$$

daher

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{2} \cdot p_n = 553{,}1.$$

Die Abweichung beider Werthe beträgt ungefähr 0,5 Proc., ist also hier noch eine weit geringere.

Was endlich die Zeit anbelangt, welche verfliesst, während der Punkt M einen gewissen Theil seiner Bahn durchläuft, so ermitteln wir dieselbe im vorliegenden Falle am leichtesten rechnerisch. Wir haben in der Differentialgleichung $dt = \frac{dv}{p_t}$, p_t constant zu setzen und erhalten (die Zeit von Null an gerechnet)

$$t = \frac{v}{p_t}.$$

In der Zeichnung ist $p_t = 7{,}4$

$ON = v = 46{,}8^{mm}$ pro Sec., mithin $t = 6{,}32''$.

Aus den numerischen Resultaten mag ersehen werden, dass die zeichnerische Lösung der gestellten Aufgabe hinsichtlich der Genauigkeit den Anforderungen gerecht wird. Aber auch was die Handlichkeit der graphischen Methoden anbelangt, ist wohl erwiesen, dass dieselben keineswegs den früheren, für rechtwinkelige Axen benutzten, nachstehen.

Freilich darf hierbei nicht verheimlicht werden, dass leicht Fälle eintreten können, in denen diese polaren Constructionen, sobald die einzelnen Grössen in einem für die Construction unpassenden Verhältniss stehen, doch erheblichere Schwierigkeiten darbieten. In diesem Fälle würde man sich genöthigt sehen, auch hier wie bei der auf rechtwinkelige Axen bezogenen Bewegung mit reducirten Grössen zu arbeiten. Da indess die polare Bewegung vorzugsweise ein theoretisches weniger ein praktisches Interesse darbietet, so wollen wir hiermit die graphische Darlegung derselben beschliessen. Mit der eingehenden Behandlung derselben habe ich nur beabsichtigt, gemäss der Tendenz dieses Werkes, auch hier die Fruchtbarkeit der graphischen Methoden nachzuweisen.

B) Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer beschleunigenden Centralkraft.

§, 34. Unter „Centralkraft" versteht man eine Kraft, die durch einen festen Punkt geht. Eine Zerlegung derselben nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen, um durch Zusammensetzung der componirenden Bewegungen die resultirende zu erhalten, ist in der Art, wie es im Abschnitte A) geschehen ist, nicht statthaft, da die componirenden Bewegungen nicht unabhängig von einander sind. Es erfordert die Bewegung eines Punktes, auf welchen eine Centralkraft wirkt, eine eigene Betrachtung.

Wir wollen zunächst die

Construction des Hodographen für die durch eine beschleunigende Centralkraft hervorgerufene Bewegung feststellen.

Bekanntlich giebt es in der Dynamik für Centralkräfte ein

Princip, welches das **Princip der Flächen** genannt wird. Dasselbe lehrt, dass der vom Mittelpunkte der Kraft nach dem bewegten Punkte gezogene Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen bestreicht. Nennen wir (s. Fig. 28, Taf. IV) ϑ den Winkel, welchen der Fahrstrahl mit der Y-Axe eines durch den Mittelpunkt gelegten rechtwinkeligen Ordinatensystems bildet, dt den Zuwachs der Zeit, so ist $r^2 d\vartheta$ der Flächeninhalt des unendlich schmalen Sectors, welcher vom Fahrstrahl beschrieben wird, während die Zeit t um dt wächst.

Das Princip lehrt, dass

$$\frac{r^2 d\vartheta}{dt} = C^2 \text{ ist.}$$

C^2 bezeichnet eine Constante.

Die Geschwindigkeit v des Punktes M hat die Richtung der Tangente. Fällen wir auf diese von O, dem Mittelpunkte der Centralkraft, ein Loth h und nennen α den Winkel, welchen die Tangente in M mit dem Fahrstrahl r einschliesst, ferner ds das Bogenelement der Bahn, so folgt

$$r d\vartheta = ds \sin\alpha.$$

Mit $\frac{r}{dt}$ beiderseits multiplicirt und $r \sin\alpha = h$ gesetzt, giebt

$$\frac{r^2 d\vartheta}{dt} = \frac{ds}{dt} . h.$$

Nun ist

$$\frac{ds}{dt} = v \text{ und } \frac{r^2 d\vartheta}{dt} = C^2,$$

also

$$v = \frac{C^2}{h}.$$

Es folgt somit der

Satz. **Die Bahngeschwindigkeit des Punktes M ist umgekehrt proportional dem vom Mittelpunkte auf die Tangente gefällten Lothe.**

Ist ausser der Grösse noch die Richtung der [illegible]geschwindigkeit v_0 gegeben, so ist auch das erste L[illegible]kannt und wir haben $v_0 = \frac{C^2}{h_0}$, also $C^2 = v_0 h_0$, so[illegible]

$$v = \frac{v_0 h_0}{h}.$$

Diese interessante geometrische Beziehung, die auch in vielen Lehrbüchern der Mechanik angeführt wird, gestattet nun folgende sehr bequeme Construction des Hodographen, vorausgesetzt, dass eben die Bahn, in welcher ein Punkt M unter dem Einflusse einer beschleunigenden Centralkraft sich bewegt, bekannt ist.

Wir fällen vom Mittelpunkte O, Fig. 28, auf die Richtung von v_0 das Loth $OA_0 = h_0$ und machen auf der andern Seite von O auf der Verlängerung von h_0 die Strecke $OB = v_0 =$ der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit. Ein über A_0B_0 als Durchmesser beschriebener Kreis schneidet das in O errichtete Loth in D_0. Dann ist

$$(OD_0)^2 = v_0 h_0 = C^2,$$
$$\text{also } OD_0 = C.$$

Der mit OD_0 um O beschriebene Kreis heisse der Grundkreis des Hodographen.

Mit Hilfe desselben finden wir nun leicht den irgend einer Stelle M der Bahn entsprechenden Strahl des Hodographen.

Ziehen wir nämlich in M, einem beliebigen Punkte der Bahn, eine Tangente und durch O eine Parallele, so schneidet diese den Grundkreis in D. Verbinden wir D mit dem Fusspunkte A des Lothes h, und errichten auf AD in D eine Senkrechte, so bestimmt diese im Schnittpunkte B die Strecke $OB = v$.

Der Ort sämmtlicher Punkte B ist der um 90^0 gegen die Bahn gedrehte Hodograph.

Das mechanische Verzeichnen der Hodographenpunkte erfolgt auch hier sehr zweckmässig mit Hilfe des schon vorhin erwähnten rechtwinkeligen Dreiecks, welches in seinem Scheitelpunkte mit einer Nadelspitze versehen ist.

Setzt man hintereinander die Spitze in die Theilpunkte des Grundkreises und dreht den Winkel so, dass der eine Schenkel genau durch den entsprechenden Fusspunkt des Lothes h geht, so kann man dem andern Schenkel entlang die Linie ziehen, welche auf der Verlängerung von h jenseits O die Punkte des Hodographen bestimmt.

Die Tangente an den Hodographen geht parallel dem durch das Centrum O gezogenen Fahrstrahl, weil erstere die Richtung der effectiven Beschleunigung ist und diese stets durchs Centrum

geht. Die Geschwindigkeit w, mit welcher sich der entsprechende Punkt m auf dem Hodographen bewegt, ist gleich der effectiven, hier also centralen Beschleunigung p.

Die geometrische Construction der Gleichung $v \cdot h = C^2$ enthält noch folgende Beziehung:

Auf jedem durch das Centrum O gehenden Strahl haben wir vier charakteristische Punkte:

A den Fusspunkt des Lothes h, B_1 den Endpunkt der Geschwindigkeitsstrecke v, wenn dieselbe um 180^0 gedreht wird, und E, F, die beiden Schnittpunkte des Strahls mit dem Grundkreis. Diese vier Punkte bilden eine harmonische Punktreihe und zwar sind die Punkte durch A und B_1 (die eben für die Construction des Hodographen eine Rolle spielen) von den beiden andern E und F (den Punkten des Grundkreises) harmonisch getrennt. —

An die Construction des Hodographen schliesst sich naturgemäss

§. 35. die Construction der Beschleunigungscurve,

die ebenfalls als polare Curve mit dem Centrum als Pol erscheint. Die Fahrstrahlen derselben stellen die Grösse der beschleunigenden Centralkraft dar.

Um diese Fahrstrahlen für jede Lage des Punktes M auf seiner Bahn construiren zu können, müssen wir voraussetzen, dass die Bahn in all ihren Elementen bekannt ist, d. h., dass an jeder Stelle genau der Krümmungsradius construirt werden kann. Dies ist z. B. bei den Kegelschnitten und der logarithmischen Spirale, für welche Bahnen die Centralbewegung noch eingehender behandelt werden wird, der Fall. Ferner muss auch der Hodograph construirt sein.

Es sei (Fig. 29, Taf. V) OB der dem Punkte M entsprechende Fahrstrahl des Hodographen, C der Krümmungsmittelpunkt der Bahn. Verschieben wir OB parallel sich selbst nach M, verbinden CE und errichten auf derselben in E eine Senkrechte, so bestimmt diese auf der Verlängerung des Krümmungsradius die Strecke $MD = p_n = \frac{v^2}{\varrho}$.

Die durch $D \parallel v$ gezogene Gerade bestimmt in der Strecke

MA die die Masseneinheit von M beschleunigende Kraft p, deren Richtung von derjenigen der Normalcomponente p_n abhängt. Letztere ist, wie bekannt, stets nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtet. Indem wir nun p nach O verschieben, so giebt deren Endpunkt einen Punkt der Beschleunigungscurve. Dem Strahl p parallel geht die Tangente an den Hodographen und ist die Geschwindigkeit w des Hodographenpunktes gleich p.

Hieraus geht hervor, dass die Beschleunigungscurve in Bezug auf den Hodographen dieselbe Rolle spielt, als der Hodograph in Bezug auf die Bahn, denn in beiden Fällen decken sich die massgebenden Bedingungen.

Definiren wir den Hodographen als Bahn, auf welcher der dem Punkte M entsprechende Punkt m als frei beweglicher Punkt läuft, so können wir die Beschleunigungscurve als den Hodographen dieser Bewegung ansehen. —

§. 36. Wir müssten uns nun mit der Lösung der umgekehrten Aufgabe beschäftigen, dass nämlich diese polare Beschleunigungscurve gegeben ist und aus ihr die Bahn construirt werden soll.

Es hat aber keinen Zweck, in dieser Richtung die Constructionen zu vervollständigen, da der Fall, dass die absolute Grösse der Centralkraft bekannt ist, in der Natur nicht vorkommt. Hier erscheint die Centralkraft stets als Function des Abstandes vom Centrum.

In Bezug hierauf sieht man sich doch genöthigt, analytisch vorzugehen, besonders wenn es sich darum handelt, die Art der Function zu ermitteln, wenn die Bahn bekannt ist, oder umgekehrt, wenn die Function gegeben ist, die Gestalt der Bahn zu ermitteln.

Obgleich die Darlegung der analytischen Methode streng genommen nicht hierher gehört, so wollen wir doch wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes uns auf die Bestimmung der Function des Abstandes auf rechnerischem Wege einlassen, wobei die Benutzung des geometrischen Satzes vom Mass der Geschwindigkeit jeden höhern Calcül entbehrlich macht.

Wir gehen von der Gleichung

$$p_n = \frac{v^2}{\varrho} \text{ aus.}$$

Nennen wir, s. Fig. 28, den Winkel zwischen Tangente und Fahrstrahl α, so ist $p_n = p \sin \alpha$, ferner ist $h = r \sin \alpha$, also da $v = \frac{C^2}{h}$, auch

$$v = \frac{C^2}{r \sin \alpha},$$

mithin

$$p = \frac{C^4}{r^2 \sin^3 \alpha \,.\, \varrho}.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir p als Function des Abstandes r, wenn

$$\alpha = f(r)$$

die Gleichung der Bahn in Tangentenordinaten und

$\varrho = F(r, \alpha)$ gegeben ist.

1) Beispiel. Planetenbewegung.

§. 37. Der Punkt M bewegt sich in einem Kegelschnitt und das Centrum O der beschleunigenden Centralkraft ist der eine Brennpunkt.

a) Die Bahn ist eine Ellipse. Sind a und b die halben Axen der Ellipse, so ist bekanntlich

$$\varrho = \frac{b^2}{a \sin^3 \alpha}.$$

Dies in die im vorigen §. hergeleitete allgemeine Gleichung für p eingeführt, giebt

$$p = \frac{C^4 \,.\, a}{r^2 \,.\, b^2}.$$

Alle Grössen ausser r sind constant, mithin folgt, dass die Centralkraft umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ist.

Bezeichnen wir mit $2q$ den Parameter der Ellipse, so folgt, da bekanntlich $\frac{b^2}{a} = q$ ist

$$p = \frac{C^4}{r^2 \,.\, q} = \frac{\mu}{r^2}.$$

$\mu = \frac{C^4}{q}$ ist die die Masseneinheit beschleunigende Centralkraft in der Entfernung 1.

b) Die Bahn ist eine Hyperbel.

Wir erhalten dieselbe Gleichung, also auch dasselbe Gesetz für die Aenderung der Centralkraft.

c) Die Bahn ist eine Parabel.

Nennen wir die Strecke des Krümmungsradius zwischen dem Punkte M und der Parabelaxe l, den halben Parameter der Parabel q, so ist bekanntlich $\varrho = \frac{l^3}{q^2}$, dies in unsere allgemeine Gleichung eingeführt, giebt

$$p = \frac{C^4 . q^2}{r^2 (l \sin \alpha)^3}.$$

Nun ist aber $l \sin \alpha$ die Subnormale der Parabel und diese ist für alle Punkte constant $= q$, daher erhalten wir auch hier

$$p = \frac{C^4}{r^2 . q},$$

ebenfalls dasselbe Gesetz für die Aenderung der Centralkraft.

Construction des Hodographen.

Der Hodograph ist bei der Planetenbewegung ein Kreis.

Um dieses nachzuweisen, bestimmen wir am zweckmässigsten, wie es auch Schell in seiner „Theorie der Bewegung und Kräfte", Seite 305, thut, den Krümmungsradius des Hodographen. Da die Tangente an den Hodographen parallel dem Fahrstrahl r geht, so ist ihr Contingenzwinkel der Winkel $d\vartheta$, den bei einer unendlich kleinen Bewegung des Planeten auf seiner Bahn der Fahrstrahl bestreicht. Ist ϱ_1 der Krümmungsradius des Hodographen, so ist $\varrho_1 \, d\vartheta$ das Bogenelement des Hodographen, also $\frac{\varrho_1 \, d\vartheta}{dt} = w$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich der dem Planeten M entsprechende Punkt m auf dem Hodographen bewegt.

Nun ist aber allgemein $w = p$, vergl. §. 19, also

$$\frac{\varrho_1 \, d\vartheta}{dt} = p = \frac{C^4}{r^2 . q}.$$

Das Princip der Flächen giebt die Beziehung $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C^2}{r^2}$, mithin ist

$$\varrho_1 = \frac{C^2}{q}.$$

Der Ausdruck rechts ist constant, also ist auch ϱ_1 constant, d. h. der Hodograph ein Kreis.

Wir haben nun noch die Lage desselben gegen die Bahn zu bestimmen.

Die Geschwindigkeit des Planeten ist in dem dem Attractionsmittelpunkte O zunächst gelegenen Scheitel der Bahn am grössten, weil das von O auf die Scheiteltangente gefällte Loth den kleinsten Werth hat.

Demgemäss muss auch der von O dem Mittelpunkte des Hodographen parallel der Scheiteltangente d. h. senkrecht zur grossen Axe der Bahn gezogene Strahl die grösste Länge haben und dies ist nur möglich, wenn der Mittelpunkt des Kreises, welcher den Hodographen darstellt, auf ihm liegt.

Die Lage des Kreises ist also festgestellt, wenn wir die Entfernung seines Mittelpunktes vom Brennpunkte der Bahn bestimmen.

Es sei die Geschwindigkeit des Planeten in dem Scheitelpunkte der Bahn, welcher dem Attractionsmittelpunkte O zunächst liegt, v_0, der zugehörige Fahrstrahl r_0, ferner s der Abstand des Mittelpunktes des Hodographenkreises vom Brennpunkte O der Bahn, dann ist (vergl. Fig. 30)

$$s = v_0 - \varrho_1 = \varrho_1 \left(\frac{v_0}{\varrho_1} - 1\right).$$

Nun ist

$$\varrho_1 = \frac{C^2}{q} = \frac{v_0 r_0}{q},$$

also

$$s = \varrho_1 \left(\frac{q}{r_0} - 1\right).$$

Bei der Ellipse ist stets $\frac{q}{r_0} < 2$, mithin $s < \varrho_1$, d. h. das Centrum der Attraction liegt, wenn der Kegelschnitt eine Ellipse ist, im Hodographen (siehe Fig. 30, Taf. IV).

Die Geschwindigkeitsrichtung des Hodographenpunktes m parallel nach dem Brennpunkte verschoben, giebt in allen Lagen

die Richtung der beschleunigenden Centralkraft. Man findet, dass dieselbe stets nach dem Brennpunkte gerichtet ist, wir haben es also mit einer anziehenden Kraft zu thun.

In der Fig. 30 ist die Curve der beschleunigenden Kräfte construirt, die Fahrstrahlen derselben geben die absolute Grösse der anziehenden Centralkraft.

Bei der Hyperbel ist $\frac{q}{r_0} > 2$, mithin $s > \varrho_1$, d. h. das Centrum der Attraction liegt, wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, ausserhalb des Hodographen (s. Fig. 31).

Ziehen wir vom Centrum O an den Hodographen zwei Tangenten OC und OD, so gehen diese parallel den Asymptoten. Die Strahlen selbst geben die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper M in der Richtung der Asymptote in die Unendlichkeit geht. Wenn M auf dem Zweige der Hyperbel läuft, dessen Brennpunkt gleichzeitig das Centrum der beschleunigenden Kraft ist, durchläuft der Hilfspunkt m den grösseren Bogen DC des Hodographen und die parallel nach dem Centrum verschobene Geschwindigkeitsrichtung desselben deutet auf eine anziehende Centralkraft.

Andrerseits, wenn M sich auf dem andern Hyperbelzweig bewegt, dessen Brennpunkt nicht das Attractionscentrum ist, so würde der entsprechende Punkt m den kleineren Bogen CD durchlaufen. Verschieben wir dessen Geschwindigkeitsrichtung nach dem Centrum, so finden wir für diese Bewegung eine abstossende Centralkraft.

Bei der Parabel (Fig. 32, Taf. IV) ist $\frac{q}{r_0} = 2$, also $s = \varrho_1$, d. h. das Centrum der Attraction liegt, wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist, auf dem Hodographen.

Demzufolge kommt der Körper M mit einer Geschwindigkeit = (Null) in der Unendlichkeit an; die Centralkraft ist stets eine anziehende, die von einem messbaren Werthe bis Null abnimmt. —

Man wird zugeben, dass diese geometrische Darstellung der Planetenbewegung einen überaus klaren Blick in Verhältnisse

bewegten Punkte M zurückgelegte Bogen seiner Bahn proportional der Differenz der zu den Endpunkten gehörigen Krümmungsradien ist, benutzen wir als Controle für die Genauigkeit der Zeichnung. Es misst beispielsweise in der Fig. 27_b, Taf. IV, der Bogen $M_0 M M_1$ $s = 74^{mm}$, ferner ist nach Fig. 27_a, $\varrho - \varrho_0 = OF - OE = 37{,}5^{mm}$, und der Werth $\frac{p_n}{p_t} = 4$. Darnach ist

$$\left(\frac{\varrho - \varrho_0}{2}\right) \frac{p_n}{p_t} = 75.$$

Die Abweichung beträgt $\frac{1}{75} = 1{,}33$ Proc., ist also eine sehr geringe.

Einen zweiten Vergleich bietet die Beziehung

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{p_n}{2} (\varrho - \varrho_0),$$

wonach der Zuwachs an lebendiger Kraft proportional der Differenz $\varrho - \varrho_0$ ist.

Die der Zeichnung entnommenen Grössen betragen, Fig. 27_a

$$v_0 = OL = 33^{mm}$$
$$v = ON = 46{,}8^{mm},$$

somit ist

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = 550{,}5.$$

Dagegen ist

$$p_n = 29{,}5. \quad \varrho - \varrho_0 = 37{,}5,$$

daher

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{2} \cdot p_n = 553{,}1.$$

Die Abweichung beider Werthe beträgt ungefähr 0,5 Proc., ist also hier noch eine weit geringere.

Was endlich die Zeit anbelangt, welche verfliesst, während der Punkt M einen gewissen Theil seiner Bahn durchläuft, so ermitteln wir dieselbe im vorliegenden Falle am leichtesten rechnerisch. Wir haben in der Differentialgleichung $dt = \frac{dv}{p_t}$, p_t constant zu setzen und erhalten (die Zeit von Null an gerechnet)

$$t = \frac{v}{p_t}.$$

In der Zeichnung ist $p_t = 7{,}4$

$ON = v = 46{,}8^{mm}$ pro Sec., mithin $t = 6{,}32''$.

Aus den numerischen Resultaten mag ersehen werden, dass die zeichnerische Lösung der gestellten Aufgabe hinsichtlich der Genauigkeit den Anforderungen gerecht wird. Aber auch was die Handlichkeit der graphischen Methoden anbelangt, ist wohl erwiesen, dass dieselben keineswegs den früheren, für rechtwinkelige Axen benutzten, nachstehen.

Freilich darf hierbei nicht verheimlicht werden, dass leicht Fälle eintreten können, in denen diese polaren Constructionen, sobald die einzelnen Grössen in einem für die Construction unpassenden Verhältniss stehen, doch erheblichere Schwierigkeiten darbieten. In diesem Falle würde man sich genöthigt sehen, auch hier wie bei der auf rechtwinkelige Axen bezogenen Bewegung mit reducirten Grössen zu arbeiten. Da indess die polare Bewegung vorzugsweise ein theoretisches weniger ein praktisches Interesse darbietet, so wollen wir hiermit die graphische Darlegung derselben beschliessen. Mit der eingehenden Behandlung derselben habe ich nur beabsichtigt, gemäss der Tendenz dieses Werkes, auch hier die Fruchtbarkeit der graphischen Methoden nachzuweisen.

B) Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer beschleunigenden Centralkraft.

§. 34. Unter „Centralkraft" versteht man eine Kraft, die durch einen festen Punkt geht. Eine Zerlegung derselben nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen, um durch Zusammensetzung der componirenden Bewegungen die resultirende zu erhalten, ist in der Art, wie es im Abschnitte A) geschehen ist, nicht statthaft, da die componirenden Bewegungen nicht unabhängig von einander sind. Es erfordert die Bewegung eines Punktes, auf welchen eine Centralkraft wirkt, eine eigene Betrachtung.

Wir wollen zunächst die

Construction des Hodographen für die durch eine beschleunigende Centralkraft hervorgerufene Bewegung feststellen.

Bekanntlich giebt es in der Dynamik für Centralkräfte ein

Princip, welches das Princip der Flächen genannt wird. Dasselbe lehrt, dass der vom Mittelpunkte der Kraft nach dem bewegten Punkte gezogene Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen bestreicht. Nennen wir (s. Fig. 28, Taf. IV) ϑ den Winkel, welchen der Fahrstrahl mit der Y-Axe eines durch den Mittelpunkt gelegten rechtwinkeligen Ordinatensystems bildet, dt den Zuwachs der Zeit, so ist $r^2 d\vartheta$ der Flächeninhalt des unendlich schmalen Sectors, welcher vom Fahrstrahl beschrieben wird, während die Zeit t um dt wächst.

Das Princip lehrt, dass

$$\frac{r^2 d\vartheta}{dt} = C^2 \text{ ist.}$$

C^2 bezeichnet eine Constante.

Die Geschwindigkeit v des Punktes M hat die Richtung der Tangente. Fällen wir auf diese von O, dem Mittelpunkte der Centralkraft, ein Loth h und nennen α den Winkel, welchen die Tangente in M mit dem Fahrstrahl r einschliesst, ferner ds das Bogenelement der Bahn, so folgt

$$r d\vartheta = ds \sin\alpha.$$

Mit $\frac{r}{dt}$ beiderseits multiplicirt und $r \sin\alpha = h$ gesetzt, giebt

$$\frac{r^2 d\vartheta}{dt} = \frac{ds}{dt} . h.$$

Nun ist

$$\frac{ds}{dt} = v \text{ und } \frac{r^2 d\vartheta}{dt} = C^2,$$

also

$$v = \frac{C^2}{h}.$$

Es folgt somit der

Satz. Die Bahngeschwindigkeit des Punktes M ist umgekehrt proportional dem vom Mittelpunkte auf die Tangente gefällten Lothe.

Ist ausser der Grösse noch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegeben, so ist auch das erste Loth h_0 bekannt und wir haben $v_0 = \frac{C^2}{h_0}$, also $C^2 = v_0 h_0$, somit auch

$$v = \frac{v_0 h_0}{h}.$$

Diese interessante geometrische Beziehung, die auch in vielen Lehrbüchern der Mechanik angeführt wird, gestattet nun folgende sehr bequeme Construction des Hodographen, vorausgesetzt, dass eben die Bahn, in welcher ein Punkt M unter dem Einflusse einer beschleunigenden Centralkraft sich bewegt, bekannt ist.

Wir fällen vom Mittelpunkte O, Fig. 28, auf die Richtung von v_0 das Loth $OA_0 = h_0$ und machen auf der andern Seite von O auf der Verlängerung von h_0 die Strecke $OB = v_0 =$ der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit. Ein über A_0B_0 als Durchmesser beschriebener Kreis schneidet das in O errichtete Loth in D_0. Dann ist

$$(OD_0)^2 = v_0 h_0 = C^2,$$
$$\text{also } OD_0 = C.$$

Der mit OD_0 um O beschriebene Kreis heisse der Grundkreis des Hodographen.

Mit Hilfe desselben finden wir nun leicht den irgend einer Stelle M der Bahn entsprechenden Strahl des Hodographen.

Ziehen wir nämlich in M, einem beliebigen Punkte der Bahn, eine Tangente und durch O eine Parallele, so schneidet diese den Grundkreis in D. Verbinden wir D mit dem Fusspunkte A des Lothes h, und errichten auf AD in D eine Senkrechte, so bestimmt diese im Schnittpunkte B die Strecke $OB = v$.

Der Ort sämmtlicher Punkte B ist der um 90^0 gegen die Bahn gedrehte Hodograph.

Das mechanische Verzeichnen der Hodographenpunkte erfolgt auch hier sehr zweckmässig mit Hilfe des schon vorhin erwähnten rechtwinkeligen Dreiecks, welches in seinem Scheitelpunkte mit einer Nadelspitze versehen ist.

Setzt man hintereinander die Spitze in die Theilpunkte des Grundkreises und dreht den Winkel so, dass der eine Schenkel genau durch den entsprechenden Fusspunkt des Lothes h geht, so kann man dem andern Schenkel entlang die Linie ziehen, welche auf der Verlängerung von h jenseits O die Punkte des Hodographen bestimmt.

Die Tangente an den Hodographen geht parallel dem durch das Centrum O gezogenen Fahrstrahl, weil erstere die Richtung der effectiven Beschleunigung ist und diese stets durchs Centrum

geht. Die Geschwindigkeit w, mit welcher sich der entsprechende Punkt m auf dem Hodographen bewegt, ist gleich der effectiven, hier also centralen Beschleunigung p.

Die geometrische Construction der Gleichung $v.h = C^2$ enthält noch folgende Beziehung:

Auf jedem durch das Centrum O gehenden Strahl haben wir vier charakteristische Punkte:

A den Fusspunkt des Lothes h, B_1 den Endpunkt der Geschwindigkeitsstrecke v, wenn dieselbe um 180° gedreht wird, und E, F, die beiden Schnittpunkte des Strahls mit dem Grundkreis. Diese vier Punkte bilden eine harmonische Punktreihe und zwar sind die Punkte durch A und B_1 (die eben für die Construction des Hodographen eine Rolle spielen) von den beiden andern E und F (den Punkten des Grundkreises) harmonisch getrennt. —

An die Construction des Hodographen schliesst sich naturgemäss

§. 35. die Construction der Beschleunigungscurve,

die ebenfalls als polare Curve mit dem Centrum als Pol erscheint. Die Fahrstrahlen derselben stellen die Grösse der beschleunigenden Centralkraft dar.

Um diese Fahrstrahlen für jede Lage des Punktes M auf seiner Bahn construiren zu können, müssen wir voraussetzen, dass die Bahn in all ihren Elementen bekannt ist, d. h., dass an jeder Stelle genau der Krümmungsradius construirt werden kann. Dies ist z. B. bei den Kegelschnitten und der logarithmischen Spirale, für welche Bahnen die Centralbewegung noch eingehender behandelt werden wird, der Fall. Ferner muss auch der Hodograph construirt sein.

Es sei (Fig. 29, Taf. V) OB der dem Punkte M entsprechende Fahrstrahl des Hodographen, C der Krümmungsmittelpunkt der Bahn. Verschieben wir OB parallel sich selbst nach M, verbinden CE und errichten auf derselben in E eine Senkrechte, so bestimmt diese auf der Verlängerung des Krümmungsradius die Strecke $MD = p_n = \frac{v^2}{\varrho}$.

Die durch $D \parallel v$ gezogene Gerade bestimmt in der Strecke

MA die die Masseneinheit von *M* beschleunigende Kraft p, deren Richtung von derjenigen der Normalcomponente p_n abhängt. Letztere ist, wie bekannt, stets nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtet. Indem wir nun p nach O verschieben, so giebt deren Endpunkt einen Punkt der Beschleunigungscurve. Dem Strahl p parallel geht die Tangente an den Hodographen und ist die Geschwindigkeit w des Hodographenpunktes gleich p.

Hieraus geht hervor, dass die Beschleunigungscurve in Bezug auf den Hodographen dieselbe Rolle spielt, als der Hodograph in Bezug auf die Bahn, denn in beiden Fällen decken sich die massgebenden Bedingungen.

Definiren wir den Hodographen als Bahn, auf welcher der dem Punkte *M* entsprechende Punkt *m* als frei beweglicher Punkt läuft, so können wir die Beschleunigungscurve als den Hodographen dieser Bewegung ansehen. —

§. 36. Wir müssten uns nun mit der Lösung der umgekehrten Aufgabe beschäftigen, dass nämlich diese polare Beschleunigungscurve gegeben ist und aus ihr die Bahn construirt werden soll.

Es hat aber keinen Zweck, in dieser Richtung die Constructionen zu vervollständigen, da der Fall, dass die absolute Grösse der Centralkraft bekannt ist, in der Natur nicht vorkommt. Hier erscheint die Centralkraft stets als Function des Abstandes vom Centrum.

In Bezug hierauf sieht man sich doch genöthigt, analytisch vorzugehen, besonders wenn es sich darum handelt, die Art der Function zu ermitteln, wenn die Bahn bekannt ist, oder umgekehrt, wenn die Function gegeben ist, die Gestalt der Bahn zu ermitteln.

Obgleich die Darlegung der analytischen Methode streng genommen nicht hierher gehört, so wollen wir doch wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes uns auf die Bestimmung der Function des Abstandes auf rechnerischem Wege einlassen, wobei die Benutzung des geometrischen Satzes vom Mass der Geschwindigkeit jeden höhern Calcül entbehrlich macht.

Wir gehen von der Gleichung

$$p_n = \frac{v^2}{\varrho} \text{ aus.}$$

Nennen wir, s. Fig. 28, den Winkel zwischen Tangente und Fahrstrahl α, so ist $p_n = p \sin \alpha$, ferner ist $h = r \sin \alpha$, also da $v = \frac{C^2}{h}$, auch

$$v = \frac{C^2}{r \sin \alpha},$$

mithin

$$p = \frac{C^4}{r^2 \sin^3 \alpha \cdot \varrho}.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir p als Function des Abstandes r, wenn

$$\alpha = f(r)$$

die Gleichung der Bahn in Tangentenordinaten und

$$\varrho = F(r, \alpha) \text{ gegeben ist.}$$

1) Beispiel. Planetenbewegung.

§. 37. Der Punkt M bewegt sich in einem Kegelschnitt und das Centrum O der beschleunigenden Centralkraft ist der eine Brennpunkt.

a) Die Bahn ist eine Ellipse. Sind a und b die halben Axen der Ellipse, so ist bekanntlich

$$\varrho = \frac{b^2}{a \sin^3 \alpha}.$$

Dies in die im vorigen §. hergeleitete allgemeine Gleichung für p eingeführt, giebt

$$p = \frac{C^4 \cdot a}{r^2 \cdot b^2}.$$

Alle Grössen ausser r sind constant, mithin folgt, dass die Centralkraft umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ist.

Bezeichnen wir mit $2q$ den Parameter der Ellipse, so folgt, da bekanntlich $\frac{b^2}{a} = q$ ist

$$p = \frac{C^4}{r^2 \cdot q} = \frac{\mu}{r^2}.$$

$\mu = \frac{C^4}{q}$ ist die die Masseneinheit beschleunigende Central-kraft in der Entfernung 1.

b) Die Bahn ist eine Hyperbel.

Wir erhalten dieselbe Gleichung, also auch dasselbe Gesetz für die Aenderung der Centralkraft.

c) Die Bahn ist eine Parabel.

Nennen wir die Strecke des Krümmungsradius zwischen dem Punkte M und der Parabelaxe l, den halben Parameter der Parabel q, so ist bekanntlich $\varrho = \frac{l^3}{q^2}$, dies in unsere allgemeine Gleichung eingeführt, giebt

$$p = \frac{C^4 . q^2}{r^2 (l \sin \alpha)^3}.$$

Nun ist aber $l \sin \alpha$ die Subnormale der Parabel und diese ist für alle Punkte constant $= q$, daher erhalten wir auch hier

$$p = \frac{C^4}{r^2 . q},$$

ebenfalls dasselbe Gesetz für die Aenderung der Centralkraft.

Construction des Hodographen.

Der Hodograph ist bei der Planetenbewegung ein Kreis.

Um dieses nachzuweisen, bestimmen wir am zweckmässigsten, wie es auch Schell in seiner „Theorie der Bewegung und Kräfte", Seite 305, thut, den Krümmungsradius des Hodographen. Da die Tangente an den Hodographen parallel dem Fahrstrahl r geht, so ist ihr Contingenzwinkel der Winkel $d\vartheta$, den bei einer unendlich kleinen Bewegung des Planeten auf seiner Bahn der Fahrstrahl bestreicht. Ist ϱ_1 der Krümmungsradius des Hodographen, so ist $\varrho_1 \, d\vartheta$ das Bogenelement des Hodographen, also $\frac{\varrho_1 \, d\vartheta}{dt} = w$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich der dem Planeten M entsprechende Punkt m auf dem Hodographen bewegt.

Nun ist aber allgemein $w = p$, vergl. §. 19, also

$$\frac{\varrho_1 \, d\vartheta}{dt} = p = \frac{C^4}{r^2 . q}.$$

Das Princip der Flächen giebt die Beziehung $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C^2}{r^2}$, mithin ist

$$\varrho_1 = \frac{C^2}{q}.$$

Der Ausdruck rechts ist constant, also ist auch ϱ_1 constant, d. h. der Hodograph ein Kreis.

Wir haben nun noch die Lage desselben gegen die Bahn zu bestimmen.

Die Geschwindigkeit des Planeten ist in dem dem Attractionsmittelpunkte O zunächst gelegenen Scheitel der Bahn am grössten, weil das von O auf die Scheiteltangente gefällte Loth den kleinsten Werth hat.

Demgemäss muss auch der von O dem Mittelpunkte des Hodographen parallel der Scheiteltangente d. h. senkrecht zur grossen Axe der Bahn gezogene Strahl die grösste Länge haben und dies ist nur möglich, wenn der Mittelpunkt des Kreises, welcher den Hodographen darstellt, auf ihm liegt.

Die Lage des Kreises ist also festgestellt, wenn wir die Entfernung seines Mittelpunktes vom Brennpunkte der Bahn bestimmen.

Es sei die Geschwindigkeit des Planeten in dem Scheitelpunkte der Bahn, welcher dem Attractionsmittelpunkte O zunächst liegt, v_0, der zugehörige Fahrstrahl r_0, ferner s der Abstand des Mittelpunktes des Hodographenkreises vom Brennpunkte O der Bahn, dann ist (vergl. Fig. 30)

$$s = v_0 - \varrho_1 = \varrho_1 \left(\frac{v_0}{\varrho_1} - 1\right).$$

Nun ist

$$\varrho_1 = \frac{C^2}{q} = \frac{v_0 r_0}{q},$$

also

$$s = \varrho_1 \left(\frac{q}{r_0} - 1\right).$$

Bei der Ellipse ist stets $\frac{q}{r_0} < 2$, mithin $s < \varrho_1$, d. h. das Centrum der Attraction liegt, wenn der Kegelschnitt eine Ellipse ist, im Hodographen (siehe Fig. 30, Taf. IV).

Die Geschwindigkeitsrichtung des Hodographenpunktes m parallel nach dem Brennpunkte verschoben, giebt in allen Lagen

die Richtung der beschleunigenden Centralkraft. Man findet, dass dieselbe stets nach dem Brennpunkte gerichtet ist, wir haben es also mit einer anziehenden Kraft zu thun.

In der Fig. 30 ist die Curve der beschleunigenden Kräfte construirt, die Fahrstrahlen derselben geben die absolute Grösse der anziehenden Centralkraft.

Bei der Hyperbel ist $\frac{q}{r_0} > 2$, mithin $s > \varrho_1$, d. h. das Centrum der Attraction liegt, wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, ausserhalb des Hodographen (s. Fig. 31).

Ziehen wir vom Centrum O an den Hodographen zwei Tangenten OC und OD, so gehen diese parallel den Asymptoten. Die Strahlen selbst geben die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper M in der Richtung der Asymptote in die Unendlichkeit geht. Wenn M auf dem Zweige der Hyperbel läuft, dessen Brennpunkt gleichzeitig das Centrum der beschleunigenden Kraft ist, durchläuft der Hilfspunkt m den grösseren Bogen DC des Hodographen und die parallel nach dem Centrum verschobene Geschwindigkeitsrichtung desselben deutet auf eine anziehende Centralkraft.

Andrerseits, wenn M sich auf dem andern Hyperbelzweig bewegt, dessen Brennpunkt nicht das Attractionscentrum ist, so würde der entsprechende Punkt m den kleineren Bogen CD durchlaufen. Verschieben wir dessen Geschwindigkeitsrichtung nach dem Centrum, so finden wir für diese Bewegung eine abstossende Centralkraft.

Bei der Parabel (Fig. 32, Taf. IV) ist $\frac{q}{r_0} = 2$, also $s = \varrho_1$, d. h. das Centrum der Attraction liegt, wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist, auf dem Hodographen.

Demzufolge kommt der Körper M mit einer Geschwindigkeit = (Null) in der Unendlichkeit an; die Centralkraft ist stets eine anziehende, die von einem messbaren Werthe bis Null abnimmt. —

Man wird zugeben, dass diese geometrische Darstellung der Planetenbewegung einen überaus klaren Blick in Verhältnisse

gestattet, die auf analytischem Wege nur mühsam und meist nur von vorzüglich mathematisch Gebildeten zu durchschauen sind.

Es ist für die Construction des Hodographenkreises zu beachten, dass bei der Ellipse und Hyperbel der Durchmesser desselben gleich der Summe, resp. der Differenz der Geschwindigkeiten v_0 und v_0' ist, welche der Planet in den Scheitelpunkten seiner Bahn besitzt. Nun verhalten sich aber (s. §. 34) die Geschwindigkeiten v_0 und v_0' umgekehrt wie die bezüglichen Abstände vom Attractionscentrum, d. h.

$$\frac{v_0}{v_0'} = \frac{r_0'}{r_0}.$$

Da nun v_0 als gegebene Grösse eingeführt ist, so ist hiernach v_0' geometrisch zu construiren, wodurch ohne Zuhilfenahme der Gleichung für s die Lage und Grösse des Durchmessers $v_0 \pm v_0'$ vollkommen bestimmt ist.

Andrerseits lässt die Gleichung

$$s = \varrho_1 \left(\frac{q}{r_0} - 1\right),$$

wenn wir die beschleunigende Centralkraft einführen, erkennen, wie die Art des Kegelschnittes durch gewisse Anfangswerthe bedingt ist.

Wir setzen in der Hauptgleichung, für die beschleunigende Kraft, gegeben als Function des Abstandes r

$$p = \frac{C^4}{q} \cdot \frac{1}{r^2},$$

$\frac{C^4}{q} = \mu$ und nennen μ die beschleunigende Anziehungskraft in der Entfernung 1.

Nun ist
$$\frac{q}{r_0} = \frac{q}{C^4} \cdot \frac{C^4}{r_0},$$

oder $C^4 = v_0^2 r_0^2$ eingeführt, giebt

$$\frac{q}{r_0} = \frac{1}{\mu} \cdot v_0^2 r_0,$$

daher

$$s = \varrho_1 \left(\frac{v_0^2 r_0}{\mu} - 1\right).$$

Auf Grund der früheren Untersuchungen folgt nun unmittelbar, dass der Kegelschnitt

1) wenn $s < \varrho_1$, d. h. $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$ ist, eine **Ellipse**,

2) wenn $s > \varrho_1$, d. h. $v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$ ist, eine **Hyperbel**,

3) wenn $s = \varrho_1$, d. h. $v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$ ist, eine **Parabel** ist.

Dies sind die bekannten Bedingungsgleichungen, auf welche die analytische Herleitung der Bahnen aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz führt.

In den drei Fig. 30—32, Taf. IV, ist die Construction des Krümmungsradius ϱ aus der centralen Beschleunigung p nach dem allgemein angegebenen Verfahren vorgenommen. In Fig. 30 ist ausserdem noch der Krümmungsradius der Ellipse in bekannter geometrischer Weise mit Zuhilfenahme des Brennpunktes construirt und gezeigt, dass sich beide Constructionen auch zeichnerisch, wie zu erwarten stand, decken.

2) Beispiel.

§. 38. **Ein Punkt M durchläuft unter dem Einflusse einer Centralkraft eine logarithmische Spirale. Es soll der Hodograph construirt und das Gesetz bestimmt werden, nach welchem sich die beschleunigende Centralkraft mit dem Abstande ändert.**

Die geometrische Construction des Hodographen kann, sobald die Grösse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegeben ist, leicht nach den allgemeinen Methoden vorgenommen werden. Die Gesetzmässigkeit der vorliegenden Bewegung gestattet aber auch hier, in geschlossener analytischer Form mit Zuhilfenahme des geometrischen Satzes vom Hodographen die Hodographencurve darzustellen. Es sei, Fig. 33, Taf. V, M_0 die Anfangslage des Punktes M auf seiner Bahn, v_0 seine Anfangsgeschwindigkeit, h_0 das vom Centrum auf die Tangente gefällte Loth, r_0 der Anfangsradius und α der Winkel, den irgend ein Fahrstrahl r mit der zugehörigen Bahntangente bildet, endlich φ der Polarwinkel zwischen r und r_0; dann lautet die Gleichung der Bahn (der logarithmischen Spirale)

$$r = r_0 e^{m\varphi},$$

worin $m = cotg\,\alpha$ eine constante Grösse ist. Die Bedingung, dass für $\varphi = 0$, $r = r_0$ ist, ist offenbar erfüllt. Die Gleichung der Hodographencurve ermitteln wir mit Zuhilfenahme der Grundgleichung

$$v = \frac{C^2}{h}.$$

Es ist $h = r\sin\alpha$ somit $v = \frac{C^2}{r\sin\alpha}$, und hierin aus der Gleichung der Bahn den Werth für r eingesetzt, giebt

$$v = \frac{C^2}{r_0\sin\alpha}\,e^{-m\varphi}.$$

Nun ist

$$C^2 = v_0 h_0 = v_0 r_0 \sin\alpha,$$

also

$$v = v_0 e^{-m\varphi}.$$

Hierbei zählt der Winkel φ von dem Strahl v_0, welcher die Anfangsgeschwindigkeit repräsentirt.

Hiernach ist der Hodograph ebenfalls eine logarithmische Spirale.

v_0 ist die grösste Geschwindigkeit, also $v < v_0$, was offenbar richtig ist, da der Punkt M mit stets geringerer Geschwindigkeit sich bewegt, je mehr er sich vom Centrum entfernt.

Messen wir v und v_0 in solchen Einheiten, dass $v_0 = r_0$ ist, so ist der Hodograph sogar identisch mit der gegebenen Bahn, nur in umgekehrter Lage.

Dass der Hodograph eine logarithmische Spirale ist, kann auch direct geometrisch hergeleitet werden.

Die Fahrstrahlen des Hodographen sind nämlich parallel den entsprechenden Bahntangenten und die Tangenten des Hodographen parallel den entsprechenden Fahrstrahlen der Bahn; da nun letztere mit den zugehörigen Bahntangenten den constanten Winkel α einschliessen, so muss auch der Winkel zwischen den Fahrstrahlen des Hodographen und den zugehörigen Tangenten constant $= \alpha$ sein.

Dies ist eben die charakteristische Eigenschaft der logarithmischen Spirale.

Was nun das Gesetz der beschleunigenden Centralkräfte anbelangt, so finden wir das absolute Maass derselben mit Hilfe

des Krümmungsradius. Man construirt denselben, wie bekannt, am zweckmässigsten, wenn man auf dem Fahrstrahl r in O eine Senkrechte errichtet, vergl. Fig. 33, Taf. V. Dieselbe schneidet die Normale in C. Es ist dann $MC = \varrho$. Macht man nun auf der Tangente in M, $MB = v$, welche Strecke dem Hodographen zu entnehmen ist, verbindet C, B und errichtet in B auf CB eine Senkrechte, welche die Verlängerung des Krümmungsradius in D trifft, so ist $MD = \frac{v^2}{\varrho} = p_n$ und die durch D parallel v gezogene Linie bestimmt auf der Verlängerung des Fahrstrahls MO die gesuchte beschleunigende Centralkraft p.

Viel interessanter ist die Beantwortung der Frage, ob auch hier die Centralkraft als Function des Abstandes r erscheint. Ohne jeden höheren Calcül zu benutzen, finden wir die gesuchte Function sofort, wenn wir in die allgemeine Gleichung

$$p = \frac{C^4}{r^2 \sin^3 \alpha \cdot \varrho}$$

den Werth ϱ des Krümmungsradius der logarithmischen Spirale, ausgedrückt durch r und α, einsetzen.

Bekanntlich ist, was übrigens direct aus der vorhin für den Krümmungsradius angeführten geometrischen Construction folgt,

$$\varrho = \frac{r}{\sin \alpha},$$

mithin

$$p = \frac{C^4}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{r^3}.$$

$\frac{C^4}{\sin^2 \alpha}$ ist eine constante Grösse, daher folgt: die beschleunigende Centralkraft ist umgekehrt proportional dem Kubus des Abstandes.

3) Beispiel.

§. 39. Wir könnten aus dem Falle, den wir noch als drittes Beispiel aufführen, einen eignen Abschnitt machen, ziehen indess vor, denselben nicht als solchen zu behandeln, da er nur theoretisches Interesse darbietet. Es ist nämlich denkbar, dass die Centralkraft nicht als Function des Abstandes, sondern durch ihre

Componenten nach zwei auf einander senkrechten Richtungen gegeben ist. Es fragt sich dann, wie aus diesem gegebenen Gesetz der Componenten die Bahn zu finden ist.

Wie bereits an anderer Stelle erwähnt wurde, kann dieser Fall ebenfalls nicht zu dem im Abschnitte A) dieses Kapitels behandelten gezählt werden, da die componirenden Bewegungen nicht unabhängig von einander sind, was gerade jene auszeichnet, sondern in einer gewissen Abhängigkeit zu einander stehen.

Der vorliegende Fall erfordert eine eigene Behandlung:

Es sei p die beschleunigende Centralkraft pro Masseneinheit, $p_1 p_2$ ihre Componenten nach zwei auf einander senkrechten Richtungen, r der Fahrstrahl nach dem Centrum, x und y die Ordinaten des Punktes M. Das Centrum O der beschleunigenden Kraft sei der Mittelpunkt des Ordinatensystems.

Aus der Bedingung, dass durch letzteren stets die beschleunigende Centralkraft geht, folgt die Proportion

$$\frac{p}{p_1} = \frac{r}{x} \text{ und } \frac{p}{p_2} = \frac{r}{y},$$

also

$$\frac{p_1}{x} = \frac{p_2}{y}.$$

Unserer Annahme nach sollten $p_1 = f(x)$ und $p_2 = f(y)$ als Curven gegeben sein. Dies hat zur Folge, dass die Ordinaten x und y der Bahn die beiden Curven in zwei Punkten A und B schneiden. Die Winkel, welche die Strahlen OA und OB mit den bezüglichen Axen bilden, müssen hiernach gleich sein. Denn die trigonometrischen Tangenten derselben sind eben

$$\frac{p_1}{x} \text{ resp. } \frac{p_2}{y}.$$

Sind also umgekehrt die Curven der Componenten der beschleunigenden Centralkraft gegeben, und soll die Bahn construirt werden, so haben wir von O zwei beliebige Strahlen zu ziehen, so dass dieselben gleiche Winkel mit den Axen bilden. Durch die Schnittpunkte dieser Strahlen mit den Curven gehen die Ordinaten der Bahn.

Ist die Bahn verzeichnet, so wird nach der allgemeinen

Methode mittelst des Lothes vom Centrum auf die Tangente die Geschwindigkeit, d. h. der Hodograph, construirt.

Unter den verschiedenen Annahmen, die man in Bezug auf die Gestalt und die Art der componirenden Curven machen kann, zeichnet sich diejenige aus, nach welcher die Curven gerade Linien sind, welche, im Nullpunkte von einem messbaren Werthe beginnend, die positive X- und Y-Axe schneiden. Dann lässt sich mittelst der Projectivität von Strahlenbüscheln nachweisen, dass die Bahn auch hier ein Kegelschnitt ist, und zwar eine Hyperbel, die durchs Centrum geht. Der Punkt M selbst geht mit einer unendlich grossen Geschwindigkeit durchs Centrum. Da dieser Fall an sich ganz interessant, aber nur eine Fiction ist, so wollen wir uns nicht weiter dabei aufhalten, sondern zu einem neuen Abschnitte übergehen.

Anhang zum ersten Theil.

III. Kapitel.

Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn.

Wir behandeln im Folgenden die Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn als Anhang zum ersten Theil, welcher ausschliesslich die Bewegung eines freien materiellen Punktes umfasste. Wenn die nachfolgenden Untersuchungen auch nicht in der Allgemeinheit geführt sind, deren sie fähig sind, so führen sie doch unter Benutzung der im ersten Theil gegebenen graphischen Methoden auch theilweise specialisirt zu wichtigen Resultaten. Es können die in diesem Abschnitte durchgeführten Beispiele auch als Anwendungen der Sätze des ersten Theiles angesehen werden, wodurch der unmittelbare Anschluss dieses Abschnittes an den ersten Theil begründet erscheint.

Was die für die Bewegung des materiellen Punktes vor-

geschriebene Bahn anbelangt, so müssen wir zwei Fälle unterscheiden: die Bahn liegt unabänderlich fest oder ist in ihrer Lage veränderlich.

A) Die Lage der Bahn ist unabänderlich.

§. 40. Die Untersuchung der Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn, welche in der Ebene eine unabänderliche Lage hat, nimmt den allgemeinsten Charakter an, wenn wir voraussetzen, dass die den Punkt M afficirende Kraft sowohl der Grösse als Richtung nach veränderlich ist.

Das Gesetz für die Veränderung der Kraft kann auf verschiedene Weise gegeben sein; die naturgemässeste Annahme, dass die Aenderung der Kraftcomponenten längs den Axen eines rechtwinkeligen Ordinatensystems gegeben sei, bedingt zwei Methoden, nach denen die Bewegung des materiellen Punktes graphisch dargestellt werden kann.

1) Wir werden von vornherein im Stande sein, die zur Wirkung kommende tangentiale Componente der Kraft längs der Bahn zu construiren und durch Rectification der letzteren die Bewegung des Punktes auf eine solche auf gerader Bahn zurückzuführen. Die tangentialen Componenten senkrecht als Ordinaten in den bezüglichen Wegtheilchen der rectificirten Bahn aufgetragen, geben die Beschleunigungscurve, von der aus nun in bekannter Weise (s. Kapitel I, §. 4, u. §. 8) die Geschwindigkeitscurve und Zeitcurve construirt werden kann. Die Uebertragung der für die rectificirte Bahn erhaltenen Grössen nach den bezüglichen Stellen der krummen Bahn bestimmt die statthabende Bewegung des materiellen Punktes in all ihren Elementen.

2) Die zweite Methode setzt eine Zerlegung der wirkenden Kraft nach der Tangente der Bahn nicht voraus, sondern besteht darin, aus der Beschleunigungscurve nach der X- resp. der Y-Axe direct die tangentiale Bahngeschwindigkeit an jeder Stelle zu ermitteln.

Wir specialisiren den allgemeinen Fall und behandeln zunächst folgende

Aufgabe. Die Kraft, welche den materiellen Punkt

M auf seiner Bahn in eine gewisse Beschleunigung versetzt, habe eine constante Richtung, sei aber der Grösse nach variabel.

Es soll die Bewegung des Punktes festgestellt werden.

Wie bei der geradlinigen Bewegung nehmen wir an, dass das Gesetz für die Veränderung der Kraft der Grösse nach durch die Beschleunigungscurve gegeben sei, deren Abscisse in die constante Richtung der Kraft fällt, und deren Ordinate die beschleunigende Kraft pro Msssemeinheit darstellt. Fig. 34_a (Taf. VI).

Die Projection der Bahnstrecke AB auf die Richtung OS der Kraft sei $A_1 B_1$. In A und B besitze der Punkt M die Geschwindigkeiten v_0 und v, die offenbar tangential an die Endpunkte der Bahn gerichtet sind.

Zur Vermehrung $v - v_0$ der Geschwindigkeit längs der Bahn AB ist eine gewisse Arbeit aufgewendet worden, die, abgesehen von jeder Reibung, durch die über der Projection $A_1 B_1$ eingeschlossene, in der Figur schraffirte Fläche dargestellt ist.

$\frac{v^2 - v_0^2}{2}$ ist die Zunahme der lebendigen Kraft pro Masseneinheit.

$\int\limits_{x_0}^{x} p\,dx$ die längs der Projectionsstrecke $x - x_0$ von der beschleunigenden Kraft pro Masseneinheit verrichtete Arbeit.

Da diese Arbeit offenbar als lebendige Kraft am Endpunkte der Bahn auftreten muss, so folgt die Beziehung

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int\limits_{x_0}^{x} p\,dx.$$

Dieselbe begründet folgenden bekannten Satz der Dynamik:

Der Punkt M erlangt in B dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er sich auf der geraden Strecke $A_1 B_1$ unter dem Einflusse der gegebenen Kraft nach B_1 bewegen würde.

Construiren wir also über der Projection $A_1 B_1$ nach der in Kapitel I, §. 4 gegebenen Methode die zu der gegebenen Beschleu-

nigungscurve gehörige Geschwindigkeitscurve (v_0 ist die Anfangsordinate), so ist deren Endordinate v die Geschwindigkeit, mit welcher M in B ankommt. Die Gestalt der Bahn AB ist offenbar ganz gleichgültig. Auch auf der anders gekrümmten Bahn $A'B'$ würde der Punkt in B' mit derselben Geschwindigkeit v ankommen, vorausgesetzt, dass $A_1 B_1$ auch die Projection von $A'B'$ ist.

Ein System von Parallelen senkrecht zur Projection schneidet die Bahn AB und die Geschwindigkeitscurve in einer Anzahl Punkten.

Rectificiren wir nun die Bahn und errichten auf derselben in den Theilpunkten als Ordinaten die zugehörigen Geschwindigkeiten, so erhalten wir eine zweite Geschwindigkeitscurve $v = f_1(s)$, aus der wir nun zeichnerisch nach der in Kapitel I, §. 8 gegebenen Methode die Zeitcurve herleiten können. Durch Rectification letzterer bestimmen wir in bekannter Weise die Zeit, welche der Punkt M braucht, um die Bahnstrecke AB zurückzulegen. In Fig. 34_b ist die Geschwindigkeitscurve $v = f_1(s)$ über der rectificirten Strecke der Bahn AB construirt.

Aus der Geschwindigkeitscurve über der Projection $A_1 B_1$ in Fig. 34_a lässt sich die Construction des Hodographen in ähnlicher Weise herleiten, wie dies bei der Bahn eines frei beweglichen Punktes geschehen ist. Wir erhalten den Hodographen, wenn wir von einem festen Punkte O der Ebene aus Strahlen ziehen, welche parallel den Bahntangenten sind und auf diesen von O aus Längen abstecken, die gleich sind den zugehörigen Ordinaten der Geschwindigkeitscurve.

Die so erhaltene Curve „der Hodograph für die Bewegung des materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn“ veranschaulicht das Geschwindigkeitsgesetz, wonach die Bewegung des Punktes vor sich geht. Es ist hierbei aber wohl zu bemerken, dass sich auf diesen Hodographen nicht ohne Weiteres die Gesetze erstrecken, welche wir bei dem Hodographen für die Bewegung eines freien materiellen Punktes aufgestellt haben, betreffend die Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit des Hodographenpunktes, der Winkelgeschwindigkeit des Hodo-

graphenstrahls, der effectiven Beschleunigung in der Bahn und den Elementen der letzteren.

Bestimmung des Normaldrucks auf vorgeschriebener Bahn.

§. 41. Der Normaldruck oder Widerstandsdruck der Bahn setzt sich bekanntlich zusammen aus der Normalcomponente p_n der äusseren Kraft und der Centrifugalkraft $\frac{v^2}{\varrho}$. Je nachdem dieselben gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, ist der Widerstandsdruck N die Summe oder die Differenz der beiden Grössen, so dass allgemein $N = p_n \pm \frac{v^2}{\varrho}$ ist.

Ermitteln wir für verschiedene Punkte der Bahn zeichnerisch die Werthe p_n und $\frac{v^2}{\varrho}$, so können wir den Widerstandsdruck N ebenfalls als Strahl senkrecht auf dem zugehörigen Hodographenstrahl im Mittelpunkte O antragen. Die Endpunkte all dieser Strahlen erfüllen eine Curve, welche das Gesetz veranschaulicht, nach welchem sich der Widerstandsdruck der Bahn ändert. Den wirklich statthabenden Druck erhalten wir, wenn wir die graphisch construirte Grösse $p_n \pm \frac{v^2}{\varrho}$ in der bezüglichen Einheit messen und mit der Masse des bewegten Punktes multipliciren. —

Hiermit ist die Bewegung des materiellen Punktes in all ihren Elementen graphisch vollständig bestimmt.

Die Behandlung der allgemeinen Aufgabe hat nun keine weiteren Schwierigkeiten.

Allgemeiner Fall.

§. 42. Ist die beschleunigende Kraft sowohl der Grösse als Richtung nach veränderlich, so tritt zu der einen Projection noch eine zweite.

Die Axen derselben seien die Richtungen eines rechtwinkeligen Ordinatensystems, nach denen die beiden Beschleunigungscurven als bekannte Grössen gegeben sind. In welchem Zusammenhang jede einzelne Projection zu der Bewegung des Punktes auf der Bahn steht, hat die Behandlung der specielleren Aufgabe gezeigt. Führen wir die angedeutete Construction somit zwei Mal

für jede Projection aus, so erhalten wir für jeden Punkt der Bahn zwei Geschwindigkeiten, die beide die Richtung der Bahntangente haben. Die Summe resp. Differenz dieser beiden Einzelgeschwindigkeiten giebt die wahre Geschwindigkeit. Ebenso setzt sich auch der Widerstandsdruck aus zwei Werthen zusammen, die einzeln in bekannter Weise aus jeder Projection ermittelt werden. —

Anwendungen.

§. 43. Unter den verschiedenen Bewegungen, welche durch constant gerichtete Kräfte einem materiellen Punkte auf einer vorgeschriebenen Bahn mitgetheilt werden kann, bietet die Bewegung eines materiellen Punktes, der allein der Schwere unterworfen ist, das ausschliesslichste Interesse dar.

Indem man die gegebene Construction über der verticalen Projection als Falllinie ausführt, erhält man das Gesetz, nach welchem sich der materielle Punkt M auf der gegebenen Bahn bewegt.

In Fig. 35, Taf. VI, ist die vorgeschriebene Bahn, auf welcher der Punkt M zu laufen gezwungen ist, die stark ausgezogene Curve ABC. Dieselbe ist auf die Verticale AX in Fig. 36 projicirt und die hier bereits existirende Geschwindigkeitsparabel des freien Falles (hergeleitet aus der im Abstande $g \parallel OX$ gezogenen Beschleunigungsgeraden) benützt.

Die unter der Bahn befindliche Horizontale ist die rectificirte Bahn und über derselben durch Uebertragung der Ordinaten der Parabel nach den bezüglichen Theilpunkten derselben die Geschwindigkeitscurve $v = f_1(s)$ und die hierzu gehörige Zeitcurve mit der Geschwindigkeitsstrecke u construirt.

Die Theilpunkte 1 . . . 15 auf der Zeitcurve liegen um gleiche Bogenlängen von einander entfernt. Die durch dieselben gelegten Verticalen schneiden die rectificirte Bahn in Punkten, welche von dem dem Geschwindigkeitsgesetze $v = f(s)$ unterworfenen Punkte M' in gleichen Zeiten passirt werden. Die Uebertragung dieser Theilpunkte auf die wirkliche Bahn liefert eine Punktreihe 1 . . . 15, welche deutlich erkennen lässt, wie die Längen der in gleichen Zeiten zurückgelegten Bögen von der Höhenlage abhängig sind und wieviel Zeit verfliesst, bis eine gewisse Strecke zurückgelegt ist.

Es ist zeichnerisch hier ein Problem gelöst, dessen Behandlung auf analytischem Wege, sobald man es nicht gerade mit den allereinfachsten Fällen zu thun hat, unmöglich oder wenigstens höchst mühsam ist.

Für die Lage M ist noch, in Fig. 35, graphisch der Bahndruck bestimmt und zwar durch Construction der Grössen $p_n = \frac{v^2}{\varrho}$ und der normalen Componente von g.

Wir wollen im Folgenden untersuchen, welche Resultate die Anwendung unserer graphischen Methoden auf die einfachsten Fälle liefert, in denen der materielle Punkt allein der Schwere unterworfen ist.

1) **Beispiel.**

§. 44. Bewegung eines materiellen Punktes auf einer geneigten Geraden.

Die Gerade bilde Fig. 36, Taf. VI, mit der Verticalen den Winkel α und habe die Länge $AB = l$. Die verticale Projection derselben sei $AB_1 = l_1$.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt M, der seine Bewegung von A aus beginnt, in B ankommt, construiren wir entweder über der Projection l_1 als Basis mittelst der constanten Beschleunigung g der Schwere die Geschwindigkeitsparabel und entnehmen derselben die Endordinate v_1 als die gesuchte Geschwindigkeit des Punktes M in B, oder wir nehmen nur den zur Wirkung gelangenden Theil der Schwere $g \cos \alpha$ und construiren mit dieser Beschleunigungsstrecke über l als Basis eine Geschwindigkeitsparabel, die natürlich in B wieder dieselbe Endordinate v_1 ergeben muss.

Hat der Punkt M auf der geneigten Geraden die Strecke ξ zurückgelegt, so besitzt er eine lebendige Kraft pro Masseneinheit

$$\frac{v^2}{2} = 2g \cos \alpha \,.\, \xi.$$

Andrerseits, wenn er die zugehörige Projection x mit der Beschleunigung g durchfallen hat, so besitzt er die lebendige Kraft pro Masseneinheit

$$\frac{v^2}{2} = 2g \,.\, x.$$

Nun ist $x = \xi \cos \alpha$, also hat v in beiden Fällen denselben Werth.

Die weiteren Elemente finden nun ihre Behandlung nach den Gesetzen des freien Falles (s. Kapitel I E) §. 13.

2) **Beispiel.**

§. 45. Bewegung eines schweren Punktes auf einem verticalen Kreise. Pendelbewegung.

Von den beiden Methoden, die wir hier anwenden können, empfiehlt es sich, die erstere, d. h. die Zerlegung der beschleunigenden Kraft nach der Richtung der Bahntangente anzuwenden und zunächst die Bewegung des Punktes auf dem rectificirten Kreisbogen zu untersuchen.

Ist α der Winkel, den die Richtung der Schwere mit dem Kreisradius bildet, Fig. 37_a, Taf. V, so ist $g \sin \alpha$ die zur Wirkung gelangende Tangentialcomponente. Verlegen wir dieselbe um 90^0 gedreht nach dem Mittelpunkte O, so liegen die Endpunkte all dieser Strecken wieder in einem Kreise. Die Beschleunigungscurve der rectificirten Kreisbahn ist demnach eine Sinuscurve (vergl. Fig. 37_b).

Hinsichtlich der Geschwindigkeitsänderung und Zeitänderung existiren bei der Pendelbewegung analog der ziemlich verwickelten analytischen Behandlung keine einfachen geometrischen Beziehungen. Um so mehr ist dieses aber bei der folgenden Bewegung der Fall.

3) **Beispiel.**

§. 46. Bewegung eines schweren Punktes auf einem Cycloidenbogen.

Wir wählen hier nur die zweite Methode, die Zerlegung der Beschleunigung nach der Richtung der Tangente und die Rectification der Cycloide, da dieselbe auf sehr interessante geometrische Beziehungen führt.

In Fig. 38_a, Taf. VI, sei, nachdem der Punkt M von A in seine gezeichnete Stellung gelangt ist, der die Cycloide erzeugende Kreis auf der Horizontalen von A nach B gerollt.

Nennen wir 2φ den Winkel, um welchen sich der erzeugende Kreis gedreht hat, so ist $g \cos \varphi = p$ die Tangentialcomponente der Beschleunigung der Schwere; denn derselben parallel geht die Halbirungslinie des Winkels 2φ.

Ist s der dem Winkel 2φ entsprechende Cycloidenbogen, von der Cycloidenmitte C aus gerechnet, also $arc\, CM = s$, r der Radius des erzeugenden Kreises, so ist bekanntlich

$$s = 4r \cos\varphi.$$

Die Hälfte dieser Strecke $= MB_1$ kann der Zeichnung entnommen werden.

Drücken wir $\cos\varphi$ durch die Tangentialcomponente aus und setzen den bezüglichen Werth $\cos\varphi = \frac{p}{g}$ in vorstehende Gleichung ein, so folgt:

$$p = \frac{g}{4r} . s,$$

p und s sind die Variabeln, also folgt:

Die Beschleunigungscurve über der rectificirten Cycloidenbahn ist eine Gerade, die durch die Mitte C' geht und mit Ersterer den Winkel α einschliesst, bestimmt durch die Gleichung $tg\,\alpha = \frac{g}{4r}$, siehe Fig. 38_b.

In dieser Modification erscheint die Bewegung des schweren Punktes auf dem Cycloidenbogen als eine einfache harmonische Bewegung, und die Gesetze der ersteren ergeben sich aus den in Kapitel I, unter E) §. 14 eingehend behandelten Gesetzen der letzteren.

Von wo auch der Punkt M auf der Cycloide sich bewegen mag, die Geschwindigkeitscurve über der rectificirten Strecke $C'D'$ ist (Fig. 38_b) stets eine Ellipse und die Zeitcurve (mit der kleinen Axe b_1 der Ellipse als Geschwindigkeit u construirt) der umschriebene Kreis.

Diese höchst interessante Verwandtschaft beider Bewegungen gestattet nun auch, den Tautochronismus der Cycloide in eigenthümlicher Art zu beweisen.

In Kapitel I, §. 14, „Einfache harmonische Bewegung“ ist bewiesen, dass die Zeit, welche verfliesst, bis der Punkt M im Mittelpunkte anlangt, unabhängig von dem Abstande ist, in welchem der Punkt M seine Bewegung beginnt. Die Uebertragung dieser Thatsache auf die Bewegung in der Cycloidenbahn liefert unmittelbar den bekannten

Satz: Die Zeit, welche verfliesst, während der materielle Punkt von verschiedenen Stellen der Cycloide seine Bewegung bis zum tiefsten Punkte derselben ausführt, bleibt stets dieselbe.

Diese merkwürdige Eigenschaft der Cycloide bezeichnet man bekanntlich mit dem Namen „Tautochronismus".

Während der dem materiellen Punkte M entsprechende Punkt M' auf dem rectificirten Cycloidenbogen läuft, dreht sich der Radius des Kreises nach den Gesetzen der einfachen harmonischen Bewegung mit constanter Geschwindigkeit um seinen Mittelpunkt C' und sein Endpunkt durchläuft den Kreis mit einer Geschwindigkeit u, welche durch die kleine Axe der Ellipse dargestellt ist.

Hat der Radius a den Winkel γ von Null an überstrichen, so ist die Zeit

$$t = \frac{a\gamma}{u} = \frac{4r\gamma}{u} = \frac{4r\gamma}{2\sqrt{gr}} = 2\gamma\sqrt{\frac{r}{g}}$$

verflossen.

Wie wir bereits anführten, ist die Bogenlänge s der Cycloide $s = 4r\cos\varphi$. Da nun in Fig. 38_b $\cos\gamma = \frac{s}{4r}$ ist, so folgt $\gamma = \varphi$,

$$\text{daher } t = 2\varphi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Bezeichnet man, wie sonst üblich ist, die ganze Länge des Cycloidenbogens von A bis C mit l, so ist $4r = l$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und die hierzu gehörige Zeit $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ die bekannte Formel, welche sich aus den analytischen Rechnungen ergiebt.

Die Gesetzmässigkeit, welcher die Geschwindigkeit v unterliegt, lässt schliessen, dass auch der Bahndruck N einem einfachen Gesetze unterworfen ist.

Wir stellen uns die Aufgabe, den Bahndruck N als Function des rectificirten Cycloidenbogens darzustellen.

Im vorliegenden Falle stellt sich N als Summe zweier Glieder dar und zwar ist

$$N = g \sin\varphi + \frac{v^2}{\varrho}.$$

Die lebendige Kraft pro Masseneinheit, welche der Punkt M im Abstande y unterhalb der Horizontalen Fig. 38_a besitzt, wenn er von A an seine Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null begonnen hat, ist

$$\frac{v^2}{2} = gy.$$

Nun ist

$$y = 2r \sin^2\varphi,$$

also

$$v^2 = 4gr \sin^2\varphi.$$

Der Krümmungsradius ϱ der Cycloide ist bekanntlich

$$\varrho = 4r \sin\varphi,$$

also

$$\frac{v^2}{\varrho} = g \sin\varphi$$

und

$$N = 2g \sin\varphi = \eta.$$

Trägt man N als Ordinate η auf dem rectificirten Cycloidenbogen am Ende der Strecke s auf, (Fig. 38_b, Taf. VI), so liegen die Endpunkte sämmtlicher Ordinaten η ebenfalls in einer Ellipse.

Um dieses nachzuweisen, ändern wir die Gleichung

$$s = 4r \cos\varphi \text{ um in}$$

$$s^2 = (4r)^2 (1 - \sin^2\varphi).$$

Hierin $\sin\varphi = \frac{N}{2g} = \frac{\eta}{2g}$ eingesetzt, giebt

$$s^2 = (4r)^2 \left(1 - \frac{\eta^2}{(2g)^2}\right)$$

oder

$$\frac{s^2}{(4r)^2} + \frac{\eta^2}{(2g)^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen $4r$ und $2g$. Dieselbe ist in der Fig. 38_b punktirt.

Die bei der Entwickelung gebrauchten Gleichungen

$$v^2 = 4gr \sin^2\varphi \text{ resp. } v = 2\sqrt{gr \sin\varphi},$$

$$\text{und } \eta = 2g \sin\varphi$$

begründen folgende Construction. Wenn wir nämlich in der Ebene irgend wo über der horizontalen Strecke $O_1 O_2 = 2\sqrt{gr}$ einen Halbkreis beschreiben, wie dies in Fig. 38_c geschehen ist, so ist derselbe der Hodograph für die Bewegung des Punktes M auf dem Cycloidenbogen. Der Mittelpunkt desselben O_1 ist der eine Endpunkt des horizontalen Durchmessers. Denn ziehen wir von O_1 irgend einen Strahl parallel der Cycloidentangente, so ist derselbe als Kreissehne $= 2\sqrt{gr\sin\varphi}$.

Andrerseits, wenn wir durch den andern Endpunkt O_2 eine Verticale legen, auf dieser $O_2 T = 2g$ machen und über dieser Strecke als Durchmesser wieder einen Halbkreis beschreiben, so ist derselbe der geometrische Ort aller Bahndrücke $N = \eta = 2g\sin\varphi$. Während M den Cycloidenbogen durchläuft, bewegt sich der Strahl des Hodographen, ebenso der auf ihm senkrecht stehende Strahl des Bahndruckes mit einer Winkel-Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{\varrho} = \frac{2\sqrt{gr\sin\varphi}}{4r\sin\varphi} = \sqrt{\frac{g}{4r}}$, d. h. einer constanten Geschwindigkeit. —

Interessant ist es noch, die Bewegung zu untersuchen, welche stattfindet, wenn der Punkt M nicht auf der concaven, sondern auf der convexen Seite der Cycloide sich zu bewegen gezwungen ist. Wir realisiren diese Bewegung, wenn wir uns die Ebene des Cycloidenbogens in Fig. 38_a um die Horizontale AX als Axe gedreht denken, bis sie wieder vertical steht.

Dann wächst die zur Wirkung gelangende Tangentialcomponente der Beschleunigung der Schwere proportional dem vom Mittelpunkte C aus gemessenen Cycloidenbogen. Die Bewegung auf der rectificirten Bahn wird demnach identisch sein mit jener einfachen geradlinigen Bewegung, die wir in Kapitel I, §. 15 „Bewegung für welche die Geschwindigkeitscurve eine Hyperbel“ ist, näher untersucht haben. Nach den daselbst erhaltenen Resultaten wächst, wenn die Bewegung vom Anfangspunkte C der Cycloide beginnt, die Geschwindigkeit proportional dem Bogen, wenn sie von einem beliebigen Punkte beginnt, wie die Ordinaten einer Hyperbel, deren Abscisse der rectificirte Cycloidenbogen, und deren Mittelpunkt der Anfangspunkt C desselben ist.

Diese an sich interessante Verwandtschaft der Bewegung auf dem umgekehrten Cycloidenbogen mit dieser dritten einfachen Bewegung liefert indess hinsichtlich der verflossenen Zeit keinen so wichtigen Satz, wie die Verwandtschaft der bezüglichen Bewegung mit der einfach harmonischen, und bleibt nur übrig, die Zeit durch Rechnung zu bestimmen (siehe S. 29).

Bemerkung. Es ist bekannt, dass für kleine Pendelausschläge der Cycloidenbogen fast mit dem Kreise zusammenfällt, und dass in Folge dessen die weit einfacheren Gesetze der Cycloidenbewegung mit grosser Annäherung auf die Pendelbewegung zu übertragen sind. Das Kriterium in unsern graphischen Constructionen bildet der Verlauf der Beschleunigungscurve. Fig. 37_b, Taf. V, zeigt deutlich, dass die Sinuscurve, welche bei der rectificirten Pendelbewegung die Beschleunigungscurve ist, je näher nach der Mitte, desto mehr durch eine gerade Linie zu ersetzen ist. Die von M' nach der Mitte C' aufsteigende Geschwindigkeitscurve wird, da die zur Strecke $C'M'$ gehörige Sinuscurve wegen der nahen Lage von M' an C' [entsprechend einem kleinen Ausschlag des Kreispendels], fast eine gerade Linie ist, sehr annähernd eine Ellipse sein.

B) Die Lage der vorgeschriebenen Bahn ist veränderlich.

1) Die Bewegung der Bahn ist eine gegebene, unabhängig von der Bewegung des materiellen Punktes.

§. 47. Wir nehmen an, dass, während der Punkt M seine gesetzmässige Bewegung längs der vorgeschriebenen Bahn ausführt, letztere noch in irgend einer Weise in ihrer Ebene bewegt wird. Welche Ursache auch dieser Bewegung zu Grunde liegen mag, wir werden stets im Stande sein, dieselbe durch Zwangläufigkeit zu erzeugen und die Bewegung der Bahn in ganz bestimmter Weise durch zwei Curven α und β zu fixiren, auf welchen zwei Punkte A und B der ihrer Gestalt nach unveränderlichen Bahn mit gegebener Geschwindigkeit sich bewegen müssen. Offenbar genügt es, wenn nur für die Bewegung des einen Punktes A auf der Curve α das Geschwindigkeitsgesetz gegeben ist. Dasselbe

sei dargestellt durch eine Geschwindigkeitscurve, welche auf den normal zu der Curve α stehenden Strahlen Strecken bestimmt, die in ihrer Länge die um 90° gedrehte Bahngeschwindigkeit des Punktes repräsentiren.

Durch Rectification der Curve α können wir dann in bekannter Weise die Zeitcurve construiren und mittelst derselben die Stellen genau markiren, welche vom Punkte A auf der Curve α in gleichen Zeitintervallen $\triangle t$ passirt werden.

Andrerseits sei die relative Bewegung des Punktes M auf der vorgeschriebenen Bahn nach der unter A) des Anhangs §. 40 erläuterten Methode festgelegt und zwar dadurch, dass auf ihr ebenfalls die Stellen markirt sind, welche Punkt M in denselben Zeitintervallen $\triangle t$ passirt.

Zeichnet man sich nun die Bahn in ihren aufeinanderfolgenden durch die Punktreihe auf der Curve α gegebenen Lagen und bezeichnet in jeder derselben den Punkt, in welchem sich M nach denselben Zeiteinheiten $\triangle t$, $2\triangle t$, $3\triangle t$, u. s. w. befindet, so erfüllen alle diese Punkte die Bahn der absoluten Bewegung.

Dieses im allgemeinsten Falle einzuhaltende Verfahren soll nun im Folgenden vereinfacht werden:

§. 48. **Aufgabe.** Die Bewegung der vorgeschriebenen Bahn ist eine geradlinig fortschreitende. Es soll die absolute Bahn des Punktes construirt werden.

Nach dem allgemeinen Verfahren ist (s. Fig. 39, Taf. V) auf der Bewegungsrichtung OX des Anfangspunktes O der Bahn die Punktreihe construirt, welche genau angiebt, wohin O nach gleich grossen Zeitintervallen $\triangle t$ gelangt.

Ebenso ist auf der Bahn OM' die Punktreihe verzeichnet, welche angiebt, wohin der Punkt M bei seiner relativen Bewegung in denselben gleich grossen Zeitintervallen $\triangle t$ gelangt.

Legen wir somit durch die Punktreihe der Bahn ein System von Linien, welche || der Richtung OX gehen, und stecken auf jeder derselben die entsprechende und der Punktreihe auf OX zu entnehmende Strecke, z. B. $15 = 5\bar{5}'$ ab, so erhalten wir in dem verbindenden Zug dieser Punkte 1' 2' 3' .... die absolute Bahn.

Den zu einander gehörigen Punkten der Bahn und der Richtung OX entsprechen die Geschwindigkeiten v und u. Das Gesetz, wonach sich die relative Geschwindigkeit v längs der Bahn ändert, ist durch den auf bekannte Weise zu construirenden Hodographen der Relativbewegung gegeben.

Indem wir nun jedem Strahl v desselben die entsprechende Ordinate u der über OX sich erhebenden Geschwindigkeitscurve (aus der eben mittelst der Zeitcurve die bezügliche Punktreihe hergeleitet sein soll) zuweisen und beide im Mittelpunkte O zu einem Parallelogramm zusammensetzen, erhalten wir in der Diagonale desselben den Strahl des Hodographen für die absolute Bewegung.

Ein besonderes Interesse bietet der

§. 49. **Specialfall**, wo die Geschwindigkeit des Punktes O der Bahn constant ist; dann theilt die Punktreihe die Richtung OX in gleiche Strecken, Fig. 40, Taf. V, infolge dessen nehmen die Abstände zwischen den Punkten der relativen und absoluten Bahn || der Richtung OX in gleichen Zeiten um gleiche Längen zu.

Der Hodograph für die absolute Bewegung ist identisch mit dem der relativen Bewegung, sobald wir als Mittelpunkt einen Punkt O_1 wählen, welcher um die Strecke $-u$ vom Mittelpunkte O auf der Richtung OX entfernt ist.

Machen wir nämlich entgegengesetzt der Geschwindigkeitsrichtung die Strecke $OO_1 = u$, so ist das $\triangle OO_1m$ gleich und congruent der Hälfte des Parallelogramms bei M, d. h. es ist $O_1m = w$, der absoluten Geschwindigkeit.

Sehr leicht sind nun auch die ausgezeichneten Stellen der absoluten Bahn zu finden, in welchen der Punkt M eine Minimal- resp. Maximalgeschwindigkeit besitzt. Zu dem Ende ist nur nöthig, vom neuen Mittelpunkte O_1 auf die Hodographencurve Normalen zu fällen und denselben parallel Tangenten an die absolute Bahn zu ziehen. Die Tangirungspunkte sind offenbar die ausgezeichneten Punkte der absoluten Bahn, in denen der bewegte Punkt M eine Minimal- resp. Maximalgeschwindigkeit

besitzt. Die Grösse und Richtung derselben ist durch die bezüglichen Normalstrahlen des Hodographen gegeben. In Fig. 40 ist auf diese Weise der Ort A construirt, in welchem die durch den Strahl Om_1 gegebene Minimalgeschwindigkeit auftritt. Ebenso würde man durch eine von O_1 an die Hodographencurve gezogene Tangente von dem Berührungspunkte derselben sofort den Wendepunkt der absoluten Bahn bestimmen können, vorausgesetzt, dass ein solcher existirt.

§. 50. **Aufgabe.** Ein der Schwere unterworfener materieller Punkt M bewegt sich auf einer unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigten Geraden, die parallel sich selbst mit der constanten Geschwindigkeit u in horizontaler Richtung fortrückt. Es ist die absolute Bahn und das Gesetz der absoluten Bewegung zu bestimmen.

Die absolute Bahn ist eine Parabel, siehe Figur 41, Tafel V.

Um dieses einzusehen, denken wir uns die geneigte Gerade OL sammt der Richtung OX um den Winkel $90^0 - \alpha$ nach links gedreht, so dass die Gerade vertical zu stehen kommt. Dann können wir dieselbe als Richtung der Schwere ansehen, in welcher der materielle Punkt M mit constanter Beschleunigung nach abwärts bewegt wird, die Richtung OX aber als Richtung der constanten Anfangsgeschwindigkeit u, welche um den Winkel α gegen die Schwerrichtung geneigt ist.

Dann stellt sich die Bewegung des Punktes M als Wurfbewegung dar, also muss die absolute Bahn in unserm gegebenen Falle eine Parabel sein (vergl. Kapitel II, §. 24).

Der Hodograph für die relative Bewegung auf der Geraden ist diese selbst mit dem Anfangspunkte O als Mittelpunkt. Verlegen wir diesen um die Strecke $= u$ in der Richtung OX nach O_1, so ist O_1 der Mittelpunkt des Hodographen der absoluten Bewegung und er selbst die in unveränderlicher Lage befindliche Gerade OL.

Das von O_1 auf OL gefällte Loth stellt der Grösse und Richtung nach die Minimalgeschwindigkeit des Punktes M in der absoluten Bahn dar. Eine parallel dem Loth gezogene Tangente an

die Parabel liefert den Ort S, in welchem diese Minimalgeschwindigkeit auftritt.

Zur Herleitung der analytischen Gleichung der absoluten Bahn, betrachten wir die Richtungen OX und OL als Axen eines schiefwinkeligen Ordinatensystems X und Y.

Die nach den Gesetzen des freien Falles vor sich gehende Bewegung längs der Geraden OL giebt die Beziehung

$$v^2 = 2 g \sin\alpha \, . \, y$$

(Gleichung der Geschwindigkeitsparabel mit dem Parameter $2 g \sin\alpha$), ferner

$$t = \frac{v}{g \sin\alpha} .$$

Die Bewegung in der Richtung OX giebt die Beziehung

$$t = \frac{x}{u} ,$$

und durch Elimination der Zeit t folgt

$$\frac{v}{g \sin\alpha} = \frac{x}{u} .$$

Die Gleichung quadrirt und den Werth für v^2 eingesetzt, giebt

$$\frac{2 g \sin\alpha \, . \, y}{g^2 \sin^2\alpha} = \frac{x^2}{u^2} ,$$

woraus $x^2 = \dfrac{2 u^2}{g \sin\alpha} \, . \, y$ folgt.

Dies ist die Gleichung einer Parabel, bezogen auf conjugirte Durchmesser.

2) Die Bewegung der Bahn ist bedingt durch die Bewegung des materiellen Punktes.

§. 51. Eine graphische Behandlung dieses Falles ist allgemein nicht möglich, da die auf Bewegung der Bahn wirkende Kraft als Function des Weges allgemein nicht bestimmt werden kann.

In einzelnen Fällen jedoch gelingt es wegen der Einfachheit der Annahmen, die Aufgabe dennoch graphisch zu lösen, wie dies im Folgenden gezeigt werden soll.

Aufgabe. Ein der Schwere unterworfener materieller Punkt M bewegt sich auf einer geneigten Ebene, die ohne Reibung horizontal verschiebbar ist.

Es soll die absolute Bahn und das Gesetz der absoluten Bewegung bestimmt werden.

Es bezeichne M die Masse des materiellen Punktes, M_1 diejenige der Ebene. Die in die Richtung OL fallende Componente der Schwere $g \sin \alpha$ (Fig. 42, Taf. V) bewirkt eine gleichmässig beschleunigte Bewegung von M längs der Ebene. $g \sin \alpha$ ist die die Masseneinheit des Punktes M beschleunigende Kraft. $\frac{M}{M_1} g \sin \alpha \cos \alpha$ ist die die Masseneinheit der Ebene beschleunigende Kraft. Da dieselbe in jeder Lage, welche Punkt M auf der Ebene einnimmt, die gleiche Grösse und Richtung hat, so ist die horizontale Bewegung der Ebene ebenfalls eine gleichmässig beschleunigte. In beiden Fällen ist also das Bewegungsgesetz durch Geschwindigkeitsparabeln darstellbar, welche, wie die Fig. 42 zeigt, mittelst der constanten Beschleunigung $g \sin \alpha$ und $\frac{M}{M_1} g \sin \alpha \cos \alpha$ über OL und OX zu construiren sind. Bestimmen wir nun in bekannter Weise zunächst auf den Geschwindigkeitsparabeln und dann auf den Richtungen OL und OX die Punkte, welche von M resp. von O in gleichen Zeiten passirt werden, so erhalten wir auf denselben zwei projectivisch ähnliche Punktreihen in perspectivischer Lage. Die absolute Bahn muss also offenbar wieder eine Gerade sein.

Nach den Gesetzen des freien Falles ist die verflossene Zeit t längs dem Wege OL

$$t = \frac{v}{g \sin \alpha},$$

längs dem Wege OX

$$t = \frac{u}{\frac{M}{M_1} g \sin \alpha . \cos \alpha}.$$

Die Gleichsetzung liefert die Beziehung

$$1) \quad \frac{v \cos \alpha}{u} = \frac{M_1}{M}.$$

In Worten:

Die horizontalen Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Massen.

Wenn M nach L und O nach A gelangt ist ($OL = l$ und $OA = a$ gesetzt), so liefert das Princip der lebendigen Kraft die Gleichungen

$$\frac{v^2}{2} = g \sin\alpha \,.\, l$$

resp.

$$\frac{u^2}{2} = \frac{M}{M_1} g \sin\alpha \,.\, \cos\alpha \,.\, a.$$

Die Gleichung 1) quadrirt und die Werthe für v^2 und u^2 eingesetzt giebt

$$2)\quad \frac{l\cos\alpha}{a} = \frac{M_1}{M}.$$

Die Gerade der absoluten Bewegung bilde mit der Horizontalen den Winkel φ, dann ist, wie aus der Figur zu ersehen,

$$tg\,\varphi = \frac{l\sin\alpha}{l\cos\alpha - a}.$$

Führen wir hierin aus Gleichung 2) den Werth für a ein, so folgt

$$3)\quad cotg\,\varphi = cotg\,\alpha\left(1 - \frac{M}{M_1}\right).$$

Diese Beziehung lehrt, dass wenn die bewegten Massen M und M_1 einander gleich sind, $cotg\,\varphi = 0$, also $\varphi = 90^0$ ist, die absolute Bahn ist dann die durch O gehende Verticale.

Der Hodograph der absoluten Bewegung ist im vorliegenden Falle selbst die durch O gehende Gerade mit O als Mittelpunkt. Das Gesetz der absoluten Bewegung ist somit graphisch durch einen Hodographen nicht darstellbar.

Analytisch folgt das Gesetz derselben aus der Gleichung (Parallelogramm der Geschwindigkeiten) $w^2 = v^2 + u^2 - 2uv\cos\alpha$.

Aus Gleichung 1) folgt

$$u = \frac{M}{M_1} v\cos\alpha.$$

Dies eingeführt giebt

$$w^2 = v^2\left[1 + \left(\frac{M}{M_1}\cos\alpha\right)^2 - 2\cos^2\alpha\left(\frac{M}{M_1}\right)\right].$$

Fügen wir in der Klammer

$$\cos^2\alpha - \cos^2\alpha$$

zu den bestehenden Gliedern hinzu und setzen $v^2 = 2gh$, worin

h die durchfallene Höhe bedeutet, so lässt sich die Gleichung auf die Form

$$w^2 = 2gh\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\left(1 - \frac{M}{M_1}\right)^2\right]$$

bringen.

In dem besondern Falle, dass $M = M_1$ ist, wird $w^2 = 2gh$, denn $\measuredangle\alpha$ ist, wie wir gezeigt haben, in diesem Falle $= 90^0$. Die Bewegung des Punktes M erfolgt dann gerade so, als wenn er frei herabfallen würde.

II. Theil.

Ueber die Wirkungen äusserer Kräfte auf ein frei bewegliches, in sich unveränderliches System von Massen.

IV. Kapitel.

Graphische Bestimmung der kinematischen (die Bewegung des Systems festlegenden) Elemente aus den Kraftwirkungen.

A) Reduction der äusseren Kräfte. Construction der Polbahnen.

§. 52. Wenn auf ein freies in sich unveränderliches System von Massen äussere Kräfte wirken (wir nehmen wie im I. Theil an, dass **sämmtliche Kräfte in der Ebene wirken, in welcher sich das System bewegt**), so werden die einzelnen Punkte desselben in einen gewissen Beschleunigungszustand versetzt.

Sämmtliche Kräfte lassen sich nach den Regeln der Statik zu einer Resultante R und einem Kräftepaare G vereinigen. Erstere wirkt im Massenmittelpunkte und ertheilt demselben genau diejenige Bewegung, in die er gerathen würde, wenn in ihm sämmtliche Masse des Systems vereinigt und er ein frei beweglicher materieller Punkt wäre.

Das Kräftepaar G erzeugt eine Rotation des Systems um seinen Massenmittelpunkt. Nennen wir f die effective Beschleunigung des Massenmittelpunktes, J das polare Trägheitsmoment des ganzen Systems in Bezug auf den Mittelpunkt als Axe, Ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems um diese, so ist $R = Mf$ und $G = \frac{J \cdot d\,\Omega}{d\,t}$.

Die allgemeine Herleitung dieser bekannten Reduction äusserer Kräfte in einem frei beweglichen in sich unveränderlichen System von Massen übergehen wir und verweisen deswegen unter Andern auf Schell's „Theorie der Bewegung und Kräfte, Cap. XIII."

In Folge dieser beiden gesonderten Kraftwirkungen werden die einzelnen Punkte des Systems complicirte, von einander abweichende Bahnen beschreiben. Jedenfalls ist aber die Bewegung eine ganz bestimmte, genau bedingt durch das Gesetz der beschleunigenden Kräfte. Wie bei zwangläufig bewegten Systemen, Mechanismen, werden wir somit auch hier die Bewegung kinematisch in all ihren Theilen genau feststellen, wenn es uns gelingt, die beiden Curven zu construiren, deren Abrollen auf einander dem System die durch die Kraftwirkungen bedingte Bewegung vorschreibt. Die eine dieser Curven, „die Polbahn", liegt fest, die andere, nach Aronhold „die Polcurve" genannt, gehört der Ebene des bewegten Systems an.

Wir stellen uns im Folgenden die

§. 53. **Aufgabe.** Auf ein frei bewegliches in sich unveränderliches System von Massen wirken äussere Kräfte. Es sollen die Polbahnen construirt werden, deren Abrollen aufeinander den einzelnen Punkten genau die Bewegung ertheilt, in welche diese durch die äusseren Kräfte versetzt werden.

Gemäss unserer Annahme haben wir nur Bewegungen im Sinne, die in einer Ebene stattfinden; daher haben wir uns auch unter dem bewegten System eine ebene, mit Masse belegte Figur gedacht. Sämmtliche äussere Kräfte, also auch die Resultante R, wie das Kräftepaar G, wirken in der Ebene des Systems.

Zunächst sind wir im Stande, die Bahn und die Geschwindig-

keit des Massenmittelpunktes graphisch zu bestimmen, je nach der Art und Weise, wie das Gesetz der Aenderung der im Massenmittelpunkte angreifenden Resultante gegeben ist.

Es sind die bezüglichen Methoden eingehend im I. Theil besprochen und die graphischen Constructionen festgelegt.

Demgemäss können wir annehmen, dass der Hodograph für die Bewegung des Massenmittelpunktes construirt sei.

Auf der Normalen der Bahn liegt offenbar der Pol $\mathfrak{P}$, und um die Polbahn festzulegen, müssen wir den jedem Punkte der Bahn entsprechenden Pol $\mathfrak{P}$ construiren.

Bezeichnen wir den Abstand $M\mathfrak{P}$ mit e, Fig. 43_a, Taf. VI, so ist

$$e\,\Omega = v, \text{ also } e = \frac{v}{\Omega},$$

v ist als Strahl des Hodographen bekannt.

Die Grösse der Winkelgeschwindigkeit Ω ist bedingt durch das Gesetz, nach welchem die Grösse des Kräftepaares sich ändert.

Die Veränderlichkeit des Kräftepaares ist im allgemeinsten Falle bedingt durch zwei Grössen, den Hebelarm und die Kraft; die graphische Durchführung unserer Aufgabe erheischt die Annahme, dass durch Reduction der Hebelarm für jede Lage constant gemacht und die Veränderlichkeit desselben auf die Kraft geworfen sei, vergleiche Fig. 43_b, Taf. VI. Das Product von Kraft und Hebelarm soll indess durch diese Reduction vollständig unverändert geblieben sein.

Bezeichnen wir mit a den Hebelarm, mit p die beschleunigende Kraft des Kräftepaares pro Masseneinheit, so ist

$$G = p\,M\,a,$$

folglich nach der vorhin aufgestellten Grundgleichung:

$$p\,M\,a = \frac{J\,d\,\Omega}{d\,t}.$$

Ist k der Trägheitsradius, so ist $J = Mk^2$, mithin

$$p\,a = \frac{k^2\,d\,\Omega}{d\,t},$$

und beiderseits mit a multiplicirt

$$p\,a^2 = \frac{k^2\,a\,d\,\Omega}{d\,t}.$$

Beschreiben wir um M, dem Massenmittelpunkte des Systems, mit dem Hebelarme a einen Kreis, so ist die Peripheriegeschwindigkeit eines auf demselben gelegenen Systempunktes M', $w = a\,\Omega$, mithin

$$a\,d\,\Omega = d\,w$$

und

$$p\,a^2 = \frac{k^2\,d\,w}{d\,t},$$

folglich

$$\frac{d\,w}{d\,t} = p \cdot \frac{a^2}{k^2} = p'$$

$\frac{a^2}{k^2}$ ist eine constante Grösse.

Diese Gleichung ist identisch mit derjenigen, welche die Beziehung zwischen der beschleunigenden Kraft und der Beschleunigung eines auf gerader Bahn bewegten Punktes giebt (siehe Theil I. §. 2). Rectificiren wir also, Fig. 43_c, Taf. VI, den Kreisbogen und tragen $\frac{p\,a^2}{k^2} = p'$, welche Grösse unserer Annahme nach als Function des Bogens bekannt sein soll, auf der geraden Bahn als Ordinate auf, so können wir nach bekannten Methoden (siehe §. 4 u. §. 8) aus der erhaltenen Beschleunigungscurve die Geschwindigkeitscurve und Zeitcurve ermitteln. Durch letztere können wir jedem Werthe v den entsprechenden Werth Ω zuweisen, denn sowohl v als Ω ist eine Function der Zeit.

Behufs Zuweisung entsprechender Werthe von v und Ω stechen wir mit dem Zirkel auf der Zeitcurve gleiche Bögen ab und ziehen durch die erhaltenen Theilpunkte, welche in Fig. 43_c, Taf. VI, mit einer laufenden Zifferreihe 1 . . . . 8 bezeichnet sind, Parallelen zur Y-Axe, so erhalten wir auf der Abscisse die Bögen der rectificirten Kreisperipherie, welche von dem Systempunkte M' relativ in gleichen Zeiträumen Δt zurückgelegt werden. Dadurch ist die relative Drehbewegung des Systems um seinen Massenmittelpunkt vollständig bestimmt.

Andererseits gestattet die graphische Construction der Bahn des Massenmittelpunktes (vergl. §. 21) auf ihr mittelst der Zeitcurve genau die Bogenlängen zu fixiren, welche in denselben gleichen Zeiträumen Δt vom Massenmittelpunkte zurückgelegt

werden. In Fig. 43_a, Taf. VI, sind die entsprechenden Theilpunkte der Bahn längs der Zeitcurve mit denselben Ziffern bezeichnet, als die Theilpunkte des rectificirten Kreisbogens in Fig. 43_c.

Am zweckmässigsten geschieht die Bestimmung entsprechender Theilpunkte, indem man in beiden Fällen die Zeitcurven mit derselben Geschwindigkeitsstrecke u construirt (siehe §. 8). Sind ausserdem sämmtliche Längen in derselben Einheit aufgetragen, so sind die Zeiträume $\triangle t$ direct proportional den Bögen $\triangle \sigma$ der Zeitcurve und dieselbe Zirkelöffnung bestimmt sowohl in Fig. 43_c als 43_a die einander entsprechenden Theilpunkte.

Durch diese Manipulation, welcher in der Analysis die Elimination der Zeit t aus den Gleichungen für v und Ω entspricht, haben wir nun jedem Werthe v einen bestimmten Werth w zugewiesen. Erstere bilden als Fahrstrahlen, in O angetragen, den Hodographen für die Bewegung des Massenmittelpunktes. Indem wir die bezüglichen Strecken w aus Fig. 43_c in den Zirkel nehmen und auf jedem zugehörigen Strahl v von O abtragen, erhalten wir eine zweite polare Curve um O, die wir als Hodograph für die Drehbewegung des Systems um seinen Massenmittelpunkt ansehen können. Nunmehr können wir auf Grund der Gleichung $e = \frac{v}{\Omega}$ die Strecken e nach einander construiren.

Setzen wir nämlich $\Omega = \frac{w}{a}$, so folgt

$$\frac{e}{v} = \frac{a}{w}.$$

Jeder Abstand e steht auf der zugehörigen Geschwindigkeit v senkrecht. Ebenso wie diese bilden die Strecken e, wenn sie parallel sich selbst nach dem Mittelpunkte O verschoben werden, eine polare Curve, deren Strahlen auf den entsprechenden des Hodographen senkrecht stehen. Zur Construction dieser Curve beschreiben wir um O, dem Anfangspunkte der Bewegung mit a, einen Kreis, Fig. 43_a, Taf. VI; derselbe schneidet die Senkrechte zum Strahl v in A. Verbinden wir A mit dem Endpunkte C von w und ziehen zu dieser Linie durch B (Endpunkt des Hodo-

graphenstrahls v) eine Parallele, so schneidet diese die Verlängerung von OA in D und es ist $OD = e$.

Auf diese Weise erhalten wir in den Endpunkten sämmtlicher Strecken e eine dritte polare Curve, die wir in der Folge „die Curve der Polabstände“ nennen wollen.

Jeder Strahl derselben parallel sich selbst nach dem zugehörigen Theilpunkte der Bahn verschoben, liefert den Pol $\mathfrak{P}$, also einen Punkt der Polbahn.

In dem speciellen Falle, dass die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = a\omega$ constant ist, folgt nach obiger Gleichung, dass e proportional v sich ändert. Die Curve der Polabstände ist dann der um 90° gedrehte Hodograph, wenn man dessen Strahlen im Verhältniss von $l : \Omega$ verändert.

Die Curve der Polabstände gestattet ferner in sehr bequemer und übersichtlicher Weise die Polcurve zu construiren.

Die Polcurve ist durch zwei Elemente bestimmt:

1) die Bögen der Polcurve und der Polbahn müssen, weil sie auf einander rollen, hinsichtlich ihrer Länge einander gleich sein. Dadurch ist jedem Punkte der Polbahn ein Punkt der Polcurve als entsprechender zugewiesen.

2) Die Abstände entsprechender Punkte von der Bahn des Massenmittelpunktes einerseits, und die Abstände entsprechender Punkte vom Massenmittelpunkte andererseits müssen einander gleich sein.

Hiernach ist die

Construction der Polcurve folgende:

Wir setzen voraus, dass die bereits construirten Punkte der Polbahn mit denselben Ziffern bezeichnet sind, als die entsprechenden von O sich erstreckenden Strahlen e der Curve der Polabstände.

Wir beschreiben durch die aufeinanderfolgenden Endpunkte der Strahlen e um O Kreise, nehmen die auf der Polbahn zwischen zwei aufeinanderfolgenden Theilpunkten befindlichen Bogenstrecken nach einander in den Zirkel und passen dieselben zwischen die zugehörigen Kreise ein.

Diese Operation bedingt nur das Einspicken der Zirkelspitzen. Sämmtliche so erhaltenen Punkte geben die Polcurve, welche, vorausgesetzt, dass wir im richtigen Sinne vom ersten Pol $\mathfrak{P}_0$ die

Construction vorgenommen haben, auch die richtige Lage zur Polbahn einnimmt.

Das Abrollen der beweglichen Polcurve auf der festliegenden Polbahn giebt nunmehr dem System genau die Bewegung, welche es erhält, wenn auf dasselbe die gegebenen Kräfte wirken.

B) Construction des Wendekreises; Bewegung des Pols auf der Polbahn; Beschleunigungscurve.

§. 54. Eine eingehendere Untersuchung der Bahnen, welche die einzelnen Punkte des Systems beschreiben, während die durch die Construction der Polbahnen kinematisch jetzt vollständig festgestellte Bewegung des Systems erfolgt, erheischt die Construction des Wendekreises.

Es existiren zur Bestimmung des Wendekreises bekanntlich zwei Methoden:

Man kann die Lage und Grösse des Wendekreises entweder aus den Elementen der Bahnen herleiten oder aus den Geschwindigkeiten.

Die erste Methode findet Anwendung bei zwangläufig bewegten Systemen (Mechanismen), die zweite Methode eignet sich dagegen vorzüglich bei der Untersuchung eines frei beweglichen Systems, wie es hier vorliegt. Dieselbe scheint meines Wissens noch nicht eingehender (wenigstens nicht geometrisch) durchgeführt zu sein (vergl. deswegen Schell „Theorie der Bewegung und Kräfte", Kap. XIV).

Es soll dies im Folgenden geschehen:

Bekanntlich ist, wenn U die Geschwindigkeit des Pols auf der Polbahn, Ω die Winkelgeschwindigkeit um den Pol, oder, was dasselbe, diejenige des Systems um den Massenmittelpunkt ist, der Durchmesser des Wendekreises

$$d = \frac{U}{\Omega}.$$

Ist Ω constant, so ist der Durchmesser des Wendekreises direct proportional U; ist Ω veränderlich, so haben wir jedem Werthe U einen bestimmten Werth Ω zuzuweisen und aus beiden den Quotienten zu bilden.

Es handelt sich also zunächst um die Construction von U der Grösse und Richtung nach.

§. 55. 1) Die Geschwindigkeit U des Pols kann als Resultante von zwei Geschwindigkeiten aufgefasst werden.

Denken wir uns nämlich für den Augenblick den Punkt M, Fig. 43_a, Taf. VI, in Ruhe und drehen den rechten Winkel, dessen beide Schenkel v und e sind, um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$, so bewegt sich, vorausgesetzt, dass während dieser unendlich kleinen Drehung die Grössen v und e sich nach ihrem Gesetze verändern, der Endpunkt der Strecke e, d. h. der Pol, offenbar mit einer Geschwindigkeit u, welche parallel ist der Tangente an den Endpunkt des Strahls e in der „Curve der Polabstände“.

Die Grösse dieser Geschwindigkeit ist bedingt durch das Gesetz, nach welchem sich der Strahl des Hodographen dreht. Nun verschieben wir den Winkel parallel sich selbst, bis sein Scheitelpunkt aus M in die unendlich nahe Lage M_1 gelangt; durch diese zweite Bewegung erhält der Pol eine Geschwindigkeit, welche gleich und parallel der Bahngeschwindigkeit v ist. Da sich jetzt der Pol $\mathfrak{P}$ in Folge dieser beiden Einzelbewegungen in seiner richtigen der vorigen unendlich nahen Lage auf der Polbahn befindet, so hat er sich in Wirklichkeit mit einer Geschwindigkeit U bewegt, welche die Resultante aus den Geschwindigkeiten v und u ist.

Die Geschwindigkeit v ist als Strahl dem Hodographen zu entnehmen;
die Geschwindigkeit u findet man geometrisch auf folgende Weise:

Die Winkelgeschwindigkeit des Strahls e in der Curve der Polabstände ist gleich der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\tau}{dt}$ des Hodographenstrahls, da beide Strahlen stets 90^0 mit einander bilden.

Nun ist, wie unter „Construction und Eigenschaften des Hodographen“ Theil I, §. 19, S. 40, nachgewiesen ist,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{v}{\varrho}.$$

Darnach ist

$$u_1 = e\frac{d\tau}{dt} = e\frac{v}{\varrho}$$

die lineare, senkrecht zu e stehende Componente der Geschwindigkeit, mit welcher sich der Endpunkt des Strahls e auf der Curve der Polabstände bewegt.

Aus der Gleichung $u_1 = \frac{ev}{\varrho}$

folgt $\frac{u_1}{e} = \frac{v}{\varrho}$.

Construiren wir, Fig. 43a, Taf. VI, den Krümmungsradius MG der Bahn, verbinden G mit dem Endpunkte von v, so haben wir dieser Verbindungslinie parallel durch den Mittelpunkt O eine Gerade zu ziehen, welche auf der in D auf dem Strahle e errichteten Senkrechten die Geschwindigkeitscomponente $DF = u_1$ bestimmt. Ziehen wir noch durch F eine Parallele zu e, so haben wir in der Strecke DH die gesuchte Geschwindigkeit u.

Diese Geschwindigkeit u mit der Bahngeschwindigkeit v vereinigt giebt die resultirende Geschwindigkeit U des Pols.

Die Aenderung der Geschwindigkeit U kann sehr zweckmässig in ähnlicher Weise graphisch dargestellt werden, wie die Aenderung der Geschwindigkeit v.

Tragen wir nämlich sämmtliche auf einander folgende Geschwindigkeiten u der Grösse und Richtung nach als Strahlen in O an, so erhalten wir den Hodographen für die Bewegung des Endpunktes des Strahls e auf der Curve der Polabstände. Jedem Strahle u dieses Hodographen entspricht ein Strahl v des Hodographen für die Bewegung des Massenmittelpunktes. Die Diagonale des aus den beiden Strahlen gebildeten Parallelogrammes ist die Geschwindigkeit U ebenfalls als Strahl in O und sämmtliche Strahlen U bilden demnach den Hodographen für die Bewegung des Pols auf der Polbahn. —

§. 56. Was nun den Wendekreis anbelangt und das Gesetz, wonach sich die Lage und Grösse seines zur Polbahn normal stehenden Durchmessers ändert, so wollen wir letzteren ebenfalls zunächst als Strahl in O construiren.

Die Gleichung $d = \frac{U}{\Omega}$ geht, wenn wir den Werth $e = \frac{v}{\Omega}$ einführen,

über in $d = \frac{Ue}{v}$,

woraus $\frac{d}{e} = \frac{U}{v}$ folgt.

d steht auf U / e „ „ v } senkrecht, daher müssen die von diesen Strahlen eingeschlossenen Dreiecke einander ähnlich sein, d. h.:

Wir finden den Durchmesser des Wendekreises d der Grösse nach, wenn wir in dem Endpunkte von e auf der Curve der Polabstände eine Normale errichten. Dieselbe bestimmt in der Strecke OJ den Durchmesser des Wendekreises. Sämmtliche Endpunkte J erfüllen eine vierte polare Curve (wir wollen dieselbe „die Curve der Wendekreisdurchmesser“ nennen), welche sehr übersichtlich das Gesetz darstellt, wonach sich die auf einander folgenden Wendekreisdurchmesser der Grösse und Lage nach ändern.

§. 57. Construction des Beschleunigungscentrums. Das Beschleunigungscentrum spielt, wie bekannt, hinsichtlich der Beschleunigungen der Systempunkte dieselbe Rolle, als der Pol hinsichtlich der Geschwindigkeiten. Als Systempunkt hat das Beschleunigungscentrum keine Beschleunigung. Die Beschleunigungen der Systempunkte sind proportional den Abständen vom Beschleunigungscentrum und schliessen dieselben mit den Beschleunigungen einen constanten Winkel ein. Die Lage des Beschleunigungscentrums und die der Grösse und Richtung nach bekannte Beschleunigung eines Systempunktes bestimmt somit die Grösse und Richtung der Beschleunigung jedes beliebigen andern Systempunktes.

Im vorliegenden Falle ist dieser ausgezeichnete Systempunkt der Massenmittelpunkt, dessen Beschleunigung der Richtung nach durch die Tangente an den Hodographen, der Grösse nach durch die Geschwindigkeit gegeben ist, mit welcher sich der entsprechende Hodographenpunkt auf der Hodographencurve bewegt.

Was nun andererseits die Lage des Beschleunigungscentrums anbelangt, so lässt sich dieselbe auf zweierlei Art bestimmen:

a) Im Anschlusse an die eben stattgehabte Betrachtung über die Beschleunigung des Massenmittelpunktes citire ich hier einen Satz, der dem Inhalte nach in Schell's „Theorie der Bewegung und Kräfte", S. 399, Kap. VI, angegeben ist, dessen constructive Bedeutung ich aber in meiner Abhandlung „die Beschleunigungen in Pleuelstangen u. s. w." Civilingenieur 1872 dargelegt habe.

Hiernach stellt sich das Beschleunigungscentrum als Schnittpunkt des Wendekreises und eines Kreises dar, der durch zwei Systempunkte und den Schnittpunkt ihrer Beschleunigungen gelegt ist. Der eine Systempunkt ist, wie wir bereits zeigten, der Massenmittelpunkt, der andere Systempunkt zweckmässig ein Punkt des Wendekreises, weil dessen Beschleunigungsrichtung als normal zum Geschwindigkeitsradius a priori bekannt ist. Die Wahl des Punktes auf dem Wendekreis ist an sich beliebig. Es ist aber zweckmässig, ihn so zu wählen, dass der Schnittpunkt des bezüglichen Kreises mit dem Wendekreis recht klar und deutlich in der Construction erscheint.

In Fig. 43_a, Taf. VI, ist diese Construction des Beschleunigungscentrums ausgeführt:

Durch den Massenmittelpunkt M ist eine Gerade gezogen, parallel der Tangente an den entsprechenden Punkt B des Hodographen.

Als Punkt des Wendekreises ist der dem Pol gegenüber liegende Punkt J gewählt, der sogenannte Wendepol des Systems und demgemäss auf pJ in J eine Senkrechte errichtet. Diese schneidet die vorhin construirte Beschleunigungsrichtung von M im Punkte K. Der um das Dreieck MKJ beschriebene Kreis schneidet den Wendekreis in einem Punkte S dem Beschleunigungscentrum. Diese Construction für alle Lagen von M auf seiner Bahn wiederholt liefert „die Curve der Beschleunigungscentra".

Ebenso wie wir die Polabstände vom Massenmittelpunkte als Strahlen in O antrugen und dadurch ein sehr anschauliches Bild erhielten, nach welchem Gesetze sich der Pol in der Ebene bewegt, können wir auch die Abstände der jeweiligen Beschleunigungs-

centra vom Pol der Grösse und Richtung nach ebenfalls als Strahlen in O construiren.

Da nämlich die beiden Strahlen in O, welche den Polabstand und den Wendekreisdurchmesser für den Pol $\mathfrak{P}$ geben, diesen parallel gehen, so lässt sich die Construction des Beschleunigungscentrums auch bei O statt in der wirklichen Lage ausführen, sobald wir D den Endpunkt des Strahls e als Massenmittelpunkt betrachten; denn die für die Construction nothwendigen Elemente sind um den Mittelpunkt O ebenso vorhanden, als am Pol $\mathfrak{P}$. Die um O vorgenommene Construction deckt sich mit der in wahrer Lage befindlichen bei $\mathfrak{P}$, wenn wir erstere zunächst um 180° drehen und dann parallel sich selbst so verschieben, dass der Mittelpunkt O mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt. Der Abstand vom Pol nach dem Beschleunigungscentrum ist auf diese Weise der Grösse und Richtung nach als Strahl s in O construirt. Die Endpunkte sämmtlicher Strahlen s erfüllen eine polare Curve, die wir analog dem Früheren „die Curve der Abstände der Beschleunigungscentra“ nennen wollen, und die in Verbindung mit der „Curve der Beschleunigungscentra“ das Gesetz veranschaulicht, nach welchem sich das Beschleunigungscentrum in seiner Ebene bewegt.

Wir wollen jetzt die zweite Methode, betreffend die Construction des Beschleunigungscentrums, für unsere Zwecke verwenden:

b) Das Beschleunigungscentrum stellt sich bekanntlich auch als Schnittpunkt des Wendekreises mit einem Kreise dar, dessen Mittelpunkt auf der Tangente zur Polbahn liegt. Beide Kreise nennt man wohl auch nach ihrem Entdecker die Bresse'schen Kreise; der letztere aber, der hinsichtlich der tangentialen Componenten der Beschleunigungen im System dieselbe Rolle spielt, als der Wendekreis hinsichtlich der Normalcomponenten, führt, soweit mir bekannt, keinen besonderen Namen. Ich werde ihn, wie ich es bereits in meiner vorhin citirten Abhandlung gethan habe, kurz „den Tangentialkreis“ nennen.

Dass das Beschleunigungscentrum in der That der Schnittpunkt beider Kreise ist, beweist man auf folgende Weise:

Man geht von der Definition aus, dass das Beschleunigungscentrum derjenige Punkt ist, der als Systempunkt keine Be-

schleunigung besitzt. Nun ist der Wendekreis der Ort aller derjenigen Systempunkte, deren Normalbeschleunigung (normal zu der betreffenden Bahn der Systempunkte) gleich Null ist, der Tangentialkreis dagegen der Ort aller derjenigen Punkte, deren Tangentialbeschleunigung (tangential zu der betreffenden Bahn) gleich Null ist. Daher ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt, weil seine Beschleunigung gleich Null ist, das Beschleunigungscentrum.

Diese Methode der Construction des Beschleunigungscentrums erfordert nun zunächst die Construction des Durchmessers des Tangentialkreises.

Der Durchmesser d' desselben ist, wie bekannt, durch die Gleichung

$$d' = \frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}}$$

gegeben.

Für den Differentialquotienten können wir aus der Beziehung zwischen beschleunigender Kraft und Winkelgeschwindigkeit

$$p' = p\frac{a^2}{k^2} = \frac{a\,d\Omega}{dt}$$

vergl. S. 110, den Werth $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{p'}{a}$ einführen, ferner für $a\Omega$ den Werth w, welchen wir durch die in Fig. 43_c, Taf. VI, ausgeführte Construction als directes Maass für Ω erhielten.

Es folgt dann $d' = \frac{wU}{p'}$, oder

$$\frac{d'}{U} = \frac{w}{p'}.$$

Auf Grund dieser Gleichung ist nun d' leicht, wie folgt, zu construiren:

Tragen wir auf jedem Strahle w, der, wie aus Fig. 43_a zu ersehen ist, in der Richtung von v liegt, die zugehörige Beschleunigung p' aus Fig. 43_c, als Strahl auf, verbinden die Endpunkte von p' und den entsprechenden Strahl U mit einander und ziehen dieser Verbindungslinie parallel eine Linie durch den Endpunkt von w, so bestimmt dieselbe auf der Richtung von U den Strahl d'.

Die Endpunkte sämmtlicher auf diese Weise construirten Strahlen d' erfüllen eine Curve, die wir analog derjenigen für den Wendekreis „die Curve der Tangentialkreisdurchmesser“ nennen wollen. Dieselbe veranschaulicht das Gesetz, wonach sich die Durchmesser der auf einander folgenden Tangentialkreise (auf der Tangente der Polbahn gelegen) der Grösse und Richtung nach ändern.

Jeder Strahl d' dieser Curve steht auf dem zugehörigen „Strahl d der Curve der Wendekreisdurchmesser“ senkrecht. Beschreiben wir um beide Strahlen als Durchmesser Kreise, so bildet die Verbindungslinie nach dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte derselben einen dritten Strahl f, der, in unveränderter Grösse parallel nach dem entsprechenden Pol 𝔓 verschoben, die Lage des Beschleunigungscentrums eindeutig bestimmt. Die Endpunkte sämmtlicher Strahlen f liegen in einer polaren Curve, die identisch mit der nach der ersten Methode erhaltenen „die Curve der Abstände der Beschleunigungscentra“ genannt werden kann.

Zur Erläuterung dieser allgemeinen geometrischen Beziehungen sollen im folgenden Kapitel mehrere der einfachsten Bewegungen unveränderlicher Systeme untersucht werden.

V. Kapitel.

Anwendungen.

§. 58. 1) **Aufgabe.** Gegeben ist ein schweres unveränderliches System, das mit einer der Grösse und Richtung nach gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_1 durch die Luft geworfen wird und gleichzeitig eine constante Winkelgeschwindigkeit um seinen Massenmittelpunkt besitzt. Es soll die statthabende Bewegung in all ihren Elementen kinematisch festgestellt werden.*)

*) Es versteht sich wohl von selbst, dass wir hier von jedem Luftwiderstande absehen und annehmen, dass das als Fläche gedachte System sich in einer Verticalebene bewegt.

Die Bahn des Massenmittelpunktes ist eine Parabel, deren Construction wir nach der unter Kapitel II des ersten Theils §. 23—25, entwickelten Methode als bekannt voraussetzen. Dort ist auch gezeigt, dass der Hodograph für die freie Wurfbewegung die durch den Endpunkt der Anfangsgeschwindigkeit v_0 gezogene Verticale ist. Hieraus folgt nun ohne Weiteres, dass die Curve der Polabstände eine Horizontale sein muss; denn im Falle, dass Ω constant ist, erhält man, wie allgemein S. 112 nachgewiesen, die Strahlen e, wenn man die Hodographenstrahlen v um 90^0 dreht und in dem Verhältniss von $1:\Omega$ verändert. Diese Horizontale ist in der Zeichnung Fig. 44, Taf. VI, mit TS bezeichnet. Bedeutet v_1 die horizontale Componente der Anfangsgeschwindigkeit (gleichzeitig der Abstand des Hodographen vom Mittelpunkte O), so ist der Abstand ($e_1 = OD_0$) der „Geraden der Polabstände" von O,

$$e_1 = \frac{v_1}{\Omega}.$$

Um nun behufs Construction der Polbahn jeder Bahnnormalen den zugehörigen Polabstand e zuweisen zu können, beachten wir, dass in Folge der gleichmässigen Bewegung des Hodographenpunktes sich auch der Endpunkt des Strahls e auf der Geraden TS mit der constanten Geschwindigkeit

$$u = g\frac{e_1}{v_1} = \frac{g}{\Omega}$$

bewegt.

Ebenso ist auch die Geschwindigkeit der Horizontalprojection M_1 des Massenmittelpunktes constant.

Um daher die einander entsprechenden Punkte und Strahlen zu erhalten, haben wir die zwischen den Endwerthen liegenden Strecken D_0C_0, B_0A_0 und OE in gleichviel Theile zu theilen, und die Theilpunkte auf letzterer vertical auf die Bahn zu projiciren. Jeder Bahnnormalen ist nun leicht der entsprechende Polabstand zugewiesen und hiernach die Construction der Polbahn wie der Polcurve vorzunehmen.

Die Polbahn ist eine Parabel. Betrachten wir nämlich die Bewegung des Pols auf der Polbahn, so bemerken wir, dass sich auch hier dem S. 114 hergeleiteten Gesetze zufolge die

Geschwindigkeit U desselben aus der in unserm Falle constanten Geschwindigkeit u und der Bahngeschwindigkeit v zusammensetzt. In Folge dessen ist der Hodograph für die Bewegung des Pols ebenfalls eine Verticale, welche von O den Abstand

$$U_1 = v_1 - u = v_1 - \frac{g}{\Omega} \text{ hat.}$$

Weil ferner die Verticalprojection von v gleich derjenigen von U ist, so bewegt sich der dem Pol $\mathfrak{P}$ entsprechende Hodographenpunkt mit derselben constanten Geschwindigkeit als der dem Massenmittelpunkte M entsprechende Hodographenpunkt. Die Bewegung des ersteren deutet also offenbar auf eine Parabel, die der Pol $\mathfrak{P}$ als schwerer Punkt durchfallen würde, wenn er mit der bezüglichen Anfangsgeschwindigkeit U_0 (Resultante von v_0 und u) und deren Richtung von O aus geworfen werden würde. Die Parabel hat dieselbe Scheitelhöhe als die Wurfparabel, was eben durch die Gleichheit der Verticalcomponenten von U und v bedingt ist.

Die graphische Construction der Polcurve ist nach der allgemeinen Methode, vergl. S. 112, vorzunehmen, wie dies in Fig. 44, Taf. VI, geschehen ist.

Um den gesetzmässigen Verlauf der Polcurve festzustellen, ist im Folgenden ihre Gleichung analytisch hergeleitet:

Wenn die einander entsprechenden Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}$ der Polcurve und Polbahn zusammenfallen und der Radius $\mathfrak{P}_1 O$ der Polcurve auf den Polabstand $M\mathfrak{P}$ zu liegen kommt, so hat sich $\mathfrak{P}_1 O$ um den Winkel φ gedreht, welchen in der gezeichneten Anfangslage die Verlängerung von $O\mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{P}M$ einschliesst.

$\mathfrak{P}M$ ist dem Strahl e parallel, folglich ist, wenn wir den Winkel, welchen der Radius $O\mathfrak{P}_1$ mit dem Anfangsstrahl CC_0 einschliesst, als Polarwinkel χ einführen, ferner den Winkel, den die Strahlen c und c_0 mit einander einschliessen, α, und den Winkel, den die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit der Horizontalen bildet, γ nennen, zunächst

$$\varphi = \chi + \alpha, \text{ ferner } \gamma - \alpha = \sphericalangle COD_0,$$

mithin

$$\chi = \varphi + COD_0 - \gamma.$$

Nun ist

$$\cos(COD_0) = \frac{e_1}{e}, \text{ also}$$

$$\sphericalangle COD_0 = \arccos\frac{e_1}{e},$$

daher

$$\chi = \varphi + \arccos\frac{e_1}{e} - \gamma.$$

φ ist als Function der Zeit durch die Differentialgleichung $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$ gegeben, woraus $\varphi = \Omega t$ folgt.

Nun hat aber in derselben Zeit t der Punkt C auf der Horizontalen der Polabstände den Weg $C_0 C$ mit der constanten Geschwindigkeit u zurückgelegt. Aus der Beziehung $ut = CC_0$ folgt

$$t = \frac{1}{u} CC_0 = \frac{\Omega}{g}\left[\sqrt{e_0^2 - e_1^2} - \sqrt{e^2 - e_1^2}\right],$$

daher ist

$$\chi = \frac{\Omega^2}{g}\left[\sqrt{e_0^2 - e_1^2} - \sqrt{e^2 - e_1^2}\right] + \arccos\frac{e_1}{e} - \gamma.$$

χ und e sind die Polarcoordinaten der Polcurve, alle übrigen Grössen sind constant.

Die Gleichung nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn wir den Polarwinkel χ_1 von dem Strahl OH zählen, der für die Lage des Massenmittelpunktes im Scheitelpunkte der Wurfparabel in die Verticale fällt. In Bezug auf den Strahl OH als Axe ist die Polcurve offenbar symmetrisch.

Wir erhalten den $\sphericalangle HOC_0 = \chi_0$, wenn wir in der Gleichung $e = e_1$ setzen, denn es ist $OH = e_1$. Dies giebt

$$\chi_0 = \frac{\Omega^2}{g}\sqrt{e_0^2 - e_1^2} - \gamma.$$

Nun ist aber

$$\chi_1 = \chi_0 - \chi,$$

daher

$$\chi_1 = \frac{\Omega^2}{g}\sqrt{e^2 - e_1^2} - \arccos\frac{e_1}{e}.$$

Für die niedersteigende Bewegung des Systems existirt auf der andern Seite des Anfangsradius OH ein congruenter Bogen der

Polcurve, der auf dem abwärts gehenden Ast der Parabel-Polbahn jenseits des Scheitels nach demselben Gesetze abrollt.

Durch die Construction der Polcurve ist jetzt die Bewegung des Systems vollständig festgestellt und wir können nunmehr zur Bestimmung der kinematischen Grössen übergehen.

Wir haben S. 122 gezeigt, dass der Hodograph für die Bewegung des Pols auf der Polbahn eine Verticale ist, die den Abstand

$$U_1 = v_1 - \frac{g}{\Omega}$$

von O hat.

Da nun der Durchmesser des Wendekreises $d = \frac{U}{\Omega}$ ist, so folgt, da zwei einander entsprechende Strahlen d und U einen Winkel von 90° einschliessen und Ω constant ist, dass auch „die Curve der Wendekreisdurchmesser" eine Horizontale $T'S'$ ist, welche von O den Abstand

$$d_1 = \frac{U_1}{\Omega} = \left(v_1 - \frac{g}{\Omega}\right) \frac{1}{\Omega} \text{ hat.}$$

Hiernach sind an den verschiedensten Stellen der Polbahn überaus leicht die Wendekreisdurchmesser zu construiren.

Aus den §. 57 angeführten Sätzen vom Beschleunigungscentrum folgt, dass, wenn die Geschwindigkeit Ω constant ist, der zum Pol $\mathfrak{P}$ diametral liegende Punkt des Wendekreises, der sogenannte „Wendepol" das Beschleunigungscentrum ist. Verfolgen wir also die Bahn des Wendepols, so erhalten wir in derselben die „Curve der Beschleunigungscentra".

Die allgemeine Construction der Curve der Wendekreisdurchmesser mittelst der Normalen zur Curve der Polabstände (vergl. S. 116) bedingt, dass der Endpunkt J' des Strahls d stets senkrecht über dem Endpunkte C des entsprechenden Strahls c liegen muss (Fig. 44, Taf. VI). Nun sind aber die bei O und $\mathfrak{P}$ von den Strahlen d und c gebildeten $\triangle\triangle\, OCJ'$ und $M\mathfrak{P}J$ einander congruent, folglich befindet sich der Wendepol J stets senkrecht in demselben Abstande unter M, d. h. die „Curve der Beschleunigungscentra" ist eine Parabel, welche der Wurfparabel congruent ist und um die constante Strecke

$$e_1 - d_1 = \frac{v_1}{\Omega} - \frac{v_1}{\Omega} + \frac{g}{\Omega_2} = \frac{g}{\Omega^2}$$

in verticaler Richtung gegen diese verschoben ist.

Demnach durchläuft auch das Beschleunigungscentrum diese Parabel mit derselben Geschwindigkeit, als der Massenmittelpunkt die seinige.

Die Beschleunigung von M ist stets vertical gerichtet, geht also in jeder Lage durchs Beschleunigungscentrum. Der Winkel zwischen dem Fahrstrahl nach dem Beschleunigungscentrum und der Beschleunigung ist demnach gleich Null, d. h. die Beschleunigungen sämmtlicher Systempunkte gehen stets durch das Beschleunigungscentrum.

§. 59. 2) **Aufgabe.** Die Axe eines Planeten stehe senkrecht zur Ebene seiner Bahn. Die Winkelgeschwindigkeit um dieselbe sei constant. Es soll die absolute Bewegung des Planeten in seiner Bahn bestimmt werden. —

Sämmtliche Punkte des Planeten bewegen sich in Ebenen, welche parallel der Bahnebene sind; es genügt also zur Erkenntniss der Bewegung des Planeten die Bewegung irgend einer Schnittfläche desselben parallel der Bahnebene festzustellen.

Die Annahme, dass die Winkelgeschwindigkeit Ω constant ist, hat zur Folge, dass der Polabstand e proportional der Bahngeschwindigkeit v ist. Nun wissen wir, dass bei der Planetenbewegung der Hodograph des Massenmittelpunktes ein Kreis ist (vergl. S. 79). Demnach ist auch die „Curve der Polabstände“ ein Kreis, siehe Fig. 45, Taf. VI, dessen durch den Mittelpunkt S gehender Durchmesser auf dem zugehörigen des Hodographen ebenfalls durch S gehenden senkrecht steht.

Das Verhältniss der Abstände der beiden Kreismittelpunkte vom Mittelpunkte S des Hodographen ist

$$\frac{SK_1}{SK} = \frac{e_0}{v_0} = \frac{1}{\Omega}.$$

Um eine richtige Anfangslage der Polcurve zur Polbahn zu erhalten, ist es zweckmässig, den Mittelpunkt des Hodographen mit unveränderter Richtung des letzteren in den Scheitelpunkt der Ellipse zu verlegen. Ueber die Lage desselben in der Ebene

kein Interesse, da sie nur durch complicirte Gleichungen darstellbar sind.

§. 60. 3) **Aufgabe.** Um eine kreisförmige Scheibe vom Gewichte P und vom Radius a ist eine Schnur gewickelt, an deren einem Ende ein Gewicht K hängt. Das andere Ende der Schnur ist an der Scheibe selbst befestigt.

Es wird vorausgesetzt, dass wegen der Kleinheit des beschleunigenden Gewichtes der Massenmittelpunkt des Systems mit dem Mittelpunkte der Scheibe sehr nahe zusammenfällt.

Es soll die Bewegung untersucht werden, welche statt hat, wenn das System mit der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit v_1 durch den Raum geworfen wird.

Vorausgesetzt, dass das als eben gedachte System in der Verticalebene der Bewegung bleibt, beschreibt der Massenmittelpunkt eine Parabel, deren Construction aus den gegebenen Elementen wir als bekannt, siehe Theil I, Kapitel II, §. 23—25 annehmen dürfen. Fig. 46, Taf. VI.

Das Gesetz für die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit ist gegeben durch die Beziehung

$$Ka = J \frac{d\Omega}{dt}.$$

Das polare Trägheitsmoment eines Kreises vom Radius a ist

$$J = \frac{\pi a^4}{4} = \frac{a^2 M}{4}.$$

Nun ist die Masse

$$M = \frac{P}{g},$$

also

$$Ka = \frac{a^2}{4} \frac{P}{g} \frac{d\Omega}{dt},$$

und

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{4Kg}{P.a} = c.$$

Der Ausdruck rechts ist constant.

Durch Integration folgt

$$\Omega = ct.$$

Um zunächst die Curve der Polabstände für den vorliegenden Fall festzulegen, entnehmen wir der freien Wurfbewegung die Beziehung

$$v_2 = gt \text{ (vergl. §. 23)},$$

worin v_2 die verticale Componente der Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes ist.

Sei α der Winkel, den die Bahngeschwindigkeit an irgend einer Stelle mit der Verticalen einschliesst, so ist

$$v_2 = v \cos\alpha = gt,$$

also

$$v = \frac{gt}{\cos\alpha}.$$

Setzen wir diesen Werth und den Werth für Ω in die Gleichung

$$e = \frac{v}{\Omega}$$

ein, so folgt

$$e = \frac{gt}{\cos\alpha . ct},$$

$$e \cos\alpha = \frac{g}{c} = \frac{Pa}{4K}.$$

Nun ist $e \cos\alpha$ die horizontale Projection von e, mithin haben wir, da der Ausdruck rechts constant ist, das Resultat:

Die Curve der Polabstände ist eine im Abstande

$$e_1 = \frac{Pa}{4K}$$

vom Anfangspunkte O gezogene Verticale.

Es ist nun nach den Gesetzen der Wurfbewegung, wie wir's bereits im vorigen Beispiel zeigten, sehr leicht, jeder Bahnnormalen den entsprechenden Strahl e zuzuweisen, und graphisch die Polbahn zu verzeichnen. Die Verticale der Polabstände ist Asymptote der Polbahn; letztere erreicht, aus der Unendlichkeit kommend, ein bestimmtes Maximum und nähert sich dann, indem sie sich nach abwärts wendet, asymptotisch der Parabel. Der Minimalwerth der normalen Annäherung ist offenbar der kleinste Werth von e, also e_1.

Dem Verlauf der Polbahn entsprechend, hat auch die Polcurve, deren Construction nach der allgemeinen Methode erfolgt,

einen Zweig, der sich in die Unendlichkeit erstreckt. Sie läuft, aus der Unendlichkeit kommend, spiralförmig um den Mittelpunkt O herum, um endlich nach unendlich vielen Windungen tangential in einen Kreis überzugehen, dessen Radius e_1 ist. —

§. 61. Wenn wir uns über die Gesetzmässigkeit der Polbahnen Rechenschaft ablegen wollen, die sowohl hier einen sehr regelmässigen Verlauf haben, als auch späterhin bei gewissen Annahmen als sehr einfache Curven erscheinen, müssen wir die analytischen Gleichungen aufzustellen suchen.

Es stellt sich hierbei heraus, dass es überaus vortheilhaft ist, die kinematische Anschauungsweise, welche wir den graphischen Constructionen zu Grunde gelegt haben, auch in die Rechnung zu übertragen. Wir haben dies bereits im vorigen Beispiel gethan. Demgemäss erscheinen die Ordinaten der Polbahn und Polcurve als Functionen einer Urvariabeln, der Zeit, durch deren Elimination man unmittelbar die bezüglichen Gleichungen erhält.

Die folgenden Rechnungen sollen das Verfahren klar legen, das gerade bei Problemen der vorliegenden Art ausgezeichnete Dienste leistet.

O sei der Nullpunkt des Ordinatensystems, dessen X-Axe horizontal, dessen Y-Axe vertical ist (Fig. 46).

Nennen wir x und y die Ordinaten der Bahn des Massenmittelpunktes, ξ und η diejenigen der Polbahn, so ist die Abscisse des Massenmittelpunktes M, wenn t Secunden vom Beginn der Bewegung verflossen sind, $x = v_1 t$.

Da der Pol in horizontaler Richtung stets um die Grösse $e_1 = e \cos \alpha$ hinter dem Massenmittelpunkte zurückbleibt, so ist die Abscisse des Pols

$$1) \quad \xi = v_1 t - e_1.$$

Die Verticalgeschwindigkeit von M ist $v_2 = gt$, also $y = \frac{gt^2}{2}$.

Der Pol liegt um die Strecke $e \sin \alpha$ tiefer, daher ist die Ordinate des Pols

$$2) \quad \eta = \frac{gt^2}{2} + e \sin \alpha.$$

Nun folgt aus der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle OAB$ und ODC, $\frac{CD}{OD} = \frac{OA}{BA}$, woraus $e \sin \alpha = \frac{e_1 v_1}{v_2} = \frac{e_1 v_1}{gt}$ folgt.

Diesen Werth in Gl. 2) eingesetzt, giebt:

$$3)\ \eta = \frac{gt^2}{2} + \frac{e_1 v_1}{gt}.$$

Durch Gl. 1) und 3) ist ξ und η als Function von t bekannt.

Aus Gl. 1) folgt nun

$$t = \frac{\xi + e_1}{v_1},$$

dies in Gl. 3) eingesetzt giebt:

$$\eta = \frac{g(\xi + e_1)^2}{2 v_1^2} + \frac{e_1 v_1^2}{g(\xi + e_1)}.$$

Diese Gleichung wird einfacher, wenn wir das Ordinatensystem um e_1 nach rechts verschieben, so dass die Verticale der Polabstände Y-Axe wird. Dann haben wir $\xi + e_1 = \xi_1$ zu setzen und erhalten

$$4)\ \eta = \frac{g \xi_1^2}{2 v_1^2} + \frac{e_1 v_1^2}{g \xi_1}$$

als Gleichung der Polbahn bezogen auf dieses Ordinatensystem.

Um die Gleichung der Polcurve zu erhalten, beachten wir, dass, sobald die beiden einander entsprechenden Pole $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ auf einander fallen, der Radius $O\mathfrak{P}_1$ genau auf $M\mathfrak{P}$ zu liegen kommt. $O\mathfrak{P}_1$ hat sich hierbei um den Winkel φ gedreht.

Nehmen wir die Horizontale durch O als Polaraxe an und nennen den Winkel, den der Radius e mit dieser bildet, χ, so ist 1) $\chi = \varphi + \alpha$.

φ und α haben wir als Functionen von e zu bestimmen.

Zunächst stellt sich φ als Function von t dar auf Grund der Beziehung $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega = ct$. c bedeutet die Constante

$$\frac{4Kg}{Pa},$$

durch Integration folgt

$$2)\ \varphi = \frac{ct^2}{2}.$$

t erhalten wir als Function von e, wenn wir aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OAB und ODC die Gleichung

$$\frac{e}{e_1} = \frac{v}{v_2}$$

ansetzen. Es ist $v_2 = gt$ und

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 = v_1^2 + g^2t^2,$$

daher

$$e^2 = e_1^2 \left(\frac{v_1^2}{g^2 t^2} + 1\right),$$

woraus

$$(e^2 - e_1^2) g^2 t^2 = e_1^2 v_1^2,$$

also

$$t^2 = \frac{e_1^2 v_1^2}{g^2 (e^2 - e_1^2)}$$

folgt.

Dies in Gl. 2) eingesetzt giebt:

$$3) \quad \varphi = \frac{c}{2} \frac{e_1^2 v_1^2}{g^2 (e^2 - e_1^2)}.$$

In Bezug auf α folgt aus $\triangle DOC$

$$\cos \alpha = \frac{e_1}{e},$$

daher

$$\alpha = \arccos \frac{e_1}{e},$$

also

$$\chi = \frac{c}{2} \frac{e_1^2 v_1^2}{g^2 (e^2 - e_1^2)} + \arccos \frac{e_1}{e}.$$

Dies ist die Gleichung der Polcurve.

Für $e = e_1$ wird $\chi = \infty$ und für $e = \infty$, $\chi = \frac{\pi}{2}$. Dies stimmt mit den Eigenschaften der Polcurve, die wir hinsichtlich ihres Verlaufs bereits feststellten.

Specialfälle.

§. 62. 1) Ist die horizontale Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = 0$, d. h. fällt das System senkrecht herunter, so gehen die Gleichungen 1) und 3) der Polbahn in voriger Aufgabe über in $\xi = - e_1$ und

$\eta = \frac{g t^2}{2}$, d. h. die Polbahn ist die Verticale der Polabstände, die eben im Abstande $- e_1$ von O entfernt ist, und der Pol bewegt sich auf ihr nach den Gesetzen des freien Falles. Hieraus folgt nun ohne Weiteres, dass die Polcurve ein Kreis ist mit dem Radius e_1. Die Bewegung des Systems ist dann eine cycloidische. Wir werden diesen Fall späterhin noch von einem andern Gesichtspunkte aus behandeln.

2) In dem besondern Falle, dass die Bahn des Massenmittelpunktes eine Gerade ist, empfiehlt es sich, statt der allgemeinen Methoden für die Construction der kinematischen Grössen, directere Methoden anzuwenden. Dieselben sind hauptsächlich bedingt durch den Umstand, dass wir es bei geradlinigten Bewegungen nicht mit Hodographen im eigentlichen Sinne des Wortes zu thun haben, sondern mit Geschwindigkeitscurven. Von diesen wird also auch zweckmässig die Construction der Polbahn resp. Polcurve ausgehen müssen.

Wir stellen uns folgende allgemeine

§. 63. **Aufgabe.** Ein unveränderliches System bewege sich mit seinem Massenmittelpunkte unter der Einwirkung beschleunigender Kräfte auf gerader Bahn. Ausserdem sei die Veränderung des auf Drehung um den Massenmittelpunkt wirkenden Kräftepaares gegeben. Es soll die statthabende Bewegung in all ihren Elementen bestimmt werden.

Wir nehmen an, dass in bekannter Weise (vergl. Theil I, §. 4 u. §. 8) über dem Wege s des Massenmittelpunktes aus der gegebenen Curve der die Masseneinheit beschleunigenden Kräfte, d. i. der Beschleunigungscurve, die Geschwindigkeitscurve construirt sei, ferner mit einer gewissen Geschwindigkeitseinheit u die zugehörige Zeitcurve. Dann ist die Geschwindigkeit v als Function der Zeit bekannt. Fig. 47, Taf. V.

Andererseits sei über dem rectificirten Bogen des um den Massenmittelpunkt M mit a beschriebenen Kreises das Gesetz der Veränderung des auf Drehung um M wirkenden Kräftepaares durch die Beschleunigungscurve gegeben, aus dieser die Geschwindigkeitscurve und die Zeitcurve mit derselben Geschwindigkeits-

einheit u construirt (vergl. Fig. 43_b und 43_c, Taf. VI), so dass also $w = a\,\Omega$ ebenfalls als Function der Zeit bekannt ist.

Die Schnittpunkte einander entsprechender Ordinaten v und w auf den zugehörigen Zeitcurven sind, da die Geschwindigkeitsstrecke u in beiden Fällen gleich gross gewählt ist, um gleiche Bogenlängen vom Anfangspunkte entfernt. Theilen wir demnach beide Zeitcurven mit derselben Zirkelöffnung $\triangle\sigma$ in eine gewisse Anzahl Theile, so können wir jede Ordinate w auf der zugehörigen Geschwindigkeitsordinate v von der Bahn aus abstecken und erhalten dann über derselben eine zweite Geschwindigkeitscurve $w = f_1(s)$, welche das Gesetz darstellt, wonach sich w, d. h. die Winkelgeschwindigkeit Ω (denn w ist proportional Ω) mit dem Wege des Massenmittelpunktes ändert. Aus Fig. 43_c, Taf. VI, sind die Ordinaten w nach den bezüglichen Wegstellen in Fig. 47, Taf. V, übertragen.

Nunmehr hat es keine Schwierigkeit, den Polabstand e mittelst der Beziehung $e = \frac{v}{\Omega}$ graphisch zu construiren.

Führen wir nämlich für Ω den Werth $\frac{w}{a}$ ein, so folgt

$$\frac{e}{a} = \frac{v}{w}.$$

Der Pol $\mathfrak{P}$ befindet sich auf der Ordinate v. Tragen wir horizontal vom Fusspunkte O derselben die Strecke $OD = a$ ab (Fig. 47) und verbinden D mit dem Endpunkte von w, ziehen hierzu durch den Endpunkt von v eine Parallele, so schneidet diese auf der Bahn die Strecke $OE = e$ ab; OE um O gedreht giebt den Pol $\mathfrak{P}$. Auf diese Weise ist leicht zunächst die Polbahn zu construiren. Auf ihr bewegt sich der Pol mit einer Geschwindigkeit U, deren Horizontalcomponente offenbar v ist.

Die Construction der Polcurve ist folgende:

Beschreiben wir um die Anfangslage O des Massenmittelpunktes einen Kreis mit a, so legt, während die Drehung des Systems durch das beschleunigende Kräftepaar vor sich geht, der Endpunkt des Radius a auf der Peripherie des Kreises in gleichen Zeiträumen $\triangle t$ Wege zurück, die direcct dem rectificirten Kreisbogen in der Constructionszeichnung Fig. 43_c, Taf. VI, zu ent-

nehmen sind, und die in derselben als Abstände der um die Bogenstrecken $\triangle \sigma$ auf der Zeitcurve von einander entfernten Geschwindigkeitsordinaten w erscheinen.

Legen wir also den rectificirten Kreisbogen mit seinen Theilpunkten auf die Peripherie des Kreises um O und verbinden die Theilpunkte mit O, so erhalten wir die auf einander folgenden Winkel, welche vom Radius a in gleichen Zeiträumen $\triangle t$ überstrichen werden. Jedem Strahl entspricht ein Polabstand e. Stecken wir denselben von O ab, so erhalten wir in dem verbindenden Zug aller Endpunkte die Polcurve.

Hierbei ist aber noch Folgendes wohl zu beachten:

In Fig. 43_b erfolgt die Drehung des Systems durch das beschleunigende Kräftepaar mit dem Zeiger der Uhr, in Fig. 47, Taf. V, in Folge des Abrollens der Polcurve in der Polbahn gegen den Zeiger der Uhr. Um also die Bewegung so zu erhalten, wie sie das Problem verlangt, haben wir in Fig. 43_b resp. 43_c die Richtung der beschleunigenden Kraft gerade umgekehrt anzunehmen, d. h. in Wirklichkeit bewegt sich der Punkt M' in der Peripherie des Kreises a resp. auf der rectificirten Bahn nach dem gefundenen Gesetze in entgegengesetzter Richtung.

Was nun das Gesetz anbelangt, nach welchem sich in dem vorliegenden Specialfalle der Wendekreisdurchmesser der Grösse nach ändert, so kann dasselbe auf zweierlei Weise (Fig. 47) bestimmt werden.

1) Durch die Geschwindigkeitsrichtung U ist die Normale zur Polbahn gegeben; Letztere schneidet die Bahn im Punkte F. Der Durchmesser d des Wendekreises bestimmt sich durch die Gleichung

$$\frac{d}{e} = \frac{U}{v} \text{ (vergl. S. 116).}$$

Nun ist aber $\sphericalangle(Uv) = \sphericalangle(de)$ und d steht auf U und e steht auf v senkrecht, mithin muss $\mathfrak{P}F$, die Hypotenuse des rechtwinkeligen $\triangle \mathfrak{P}OF$, der Durchmesser d des Wendekreises sein.

2) Die gerade Bahn des Massenmittelpunktes ist eine Roulette des Systems; da der Krümmungsmittelpunkt derselben im Unendlichen liegt, die Punkte des Wendekreises aber als Systempunkte bekanntlich Bahnelemente beschreiben, deren Krümmungsmittel-

punkte im Unendlichen liegen, so muss der Wendekreis offenbar durch O gehen. Derselbe schneidet also die Bahn in F dem Endpunkte der Normalen und $\mathfrak{P}E$ ist der Durchmesser des Wendekreises.

In ähnlicher Weise lässt sich auch der Durchmesser des Tangentialkreises construiren.

Wir gehen von der Gleichung

$$\frac{d'}{U} = \frac{w}{p'} \text{ (vergl. S. 119)}$$

aus. Drehen wir die Geschwindigkeitsstrecke U um $\mathfrak{P}$, so dass dieselbe normal zur geraden Bahn des Massenmittelpunktes zu stehen kommt, machen auf ihr $\mathfrak{P}H = U$, ferner $\mathfrak{P}K = p'$ und auf der Tangente zur Polbahn (auf der Seite nach welcher hin sich der Pol $\mathfrak{P}$ bewegt) $\mathfrak{P}L = w$, so finden wir d', wenn wir zur Verbindungslinie KL durch H eine Parallele ziehen. Dieselbe giebt in GN den Durchmesser d' des Tangentialkreises. Der Schnittpunkt beider um $\mathfrak{P}F$ und $\mathfrak{P}N$ als Durchmesser beschriebenen Kreise liefert bekanntlich das Beschleunigungscentrum. Durch Wiederholung dieser Construction für verschiedene Lagen von M auf seiner Bahn erhalten wir die Curve der Beschleunigungscentra. Die Richtung der Beschleunigung des Massenmittelpunktes fällt in die gerade Bahn. Ihre Grösse ist als Ordinate der Beschleunigungscurve zu entnehmen. Es ist also mit Zuhilfenahme des Beschleunigungscentrums (vergl. den auf S. 116 angeführten Satz) die Beschleunigung jedes beliebigen Systempunktes der Grösse und Richtung nach gefunden.

1) **Beispiel.** Ein unveränderliches System falle vertical herunter:

§. 64. a) Es rotire gleichzeitig mit der constanten Geschwindigkeit Ω um seinen Massenmittelpunkt.

Der Massenmittelpunkt des Systems bewegt sich in der Verticalen nach den Gesetzen des freien Falles. Da die Geschwindigkeitscurve für diese Bewegung eine Parabel ist (vergl. §. 13), so ist auch die Polbahn eine Parabel, Fig. 48, Taf. V; denn da Ω der Annahme nach constant ist, wächst auf Grund der Beziehung $e = \frac{v}{\Omega}$ der Polabstand e proportional v.

Durch Theilung der Scheiteltangente in gleiche Theile und Herunterprojiciren dieser Theilpunkte auf die Geschwindigkeitsparabel finden wir bekanntlich die Stellen der Bahn, welche M in gleichen Zeiträumen t passirt (vergl. §. 13). Der Radius e der Polcurve beschreibt in denselben Zeiträumen gleiche Winkel, d. h. $\sphericalangle\, \varphi$ wächst proportional der Zeit und ist bestimmt durch die Gleichung

$$\varphi = \Omega t = \frac{\Omega v}{g}.$$

Für die graphische Construction der Polcurve empfiehlt es sich, den Werth $\Omega = \frac{v}{e}$ einzuführen. Dies giebt

$$\varphi = \frac{v}{e} \cdot \frac{v}{g}.$$

Man beschreibt nun mit der constanten Grösse $\frac{e}{v} \cdot g$ um O einen Kreis, und theilt denselben so ein, dass auf Grund der Beziehung

$$\left(\frac{e}{v} \cdot g\right) \varphi = v$$

die Theilpunkte vom Anfangspunkte A in der Horizontalen um Kreisbögen, deren Längen $= v$ sind, entfernt liegen.

Die Uebertragung der Polabstände e auf die bezüglichen Strahlen in O, liefert nun die Polcurve. Dieselbe ist eine archimedische Spirale, da die Strahlen e sowohl, als die Winkel φ, proportional der Zeit wachsen.

Die Schnittpunkte der Normalen zur Polbahn mit der Falllinie sind, da Ω constant ist, als Wendepole die Beschleunigungscentra. Da die Entfernung des Massenmittelpunktes vom zugehörigen Beschleunigungscentrum als Subnormale der Parabel-Polbahn für alle Lagen constant ist, so bewegt sich auch das Beschleunigungscentrum wie ein freibeweglicher Punkt nach den Gesetzen des freien Falles. Die verticale Beschleunigungsrichtung des Massenmittelpunktes geht durch das Beschleunigungscentrum, der bezügliche Winkel zwischen dieser und dem Fahrstrahl vom Beschleunigungscentrum ist gleich Null, daher gehen auch die Beschleunigungen aller andern Systempunkte durch das Beschleunigungscentrum.

§. 65. b) **Das System rotire mit einer Geschwindigkeit Ω um seinen Mittelpunkt, welche proportional der Zeit wächst.**

Wir haben hier einen Specialfall der vorhin behandelten dritten allgemeinen Aufgabe (§. 60) vor uns und bereits dort Gelegenheit genommen, die Polbahn und Polcurve hierfür zu bestimmen. Die Gestalt derselben lässt sich auf directem Wege, wie folgt, ermitteln. Fig. 49, Taf. V.

Nach den Gesetzen des freien Falles (vergl. §. 13) wächst die Bahngeschwindigkeit proportional der Zeit, d. h. es ist

$$v = gt.$$

Nun ist aber der Annahme nach

$$\Omega = ct$$

(c bedeutet eine Constante), mithin folgt

$$e = \frac{v}{\Omega} = \frac{g}{c},$$

der Ausdruck rechts ist constant, d. h. die Polbahn ist eine im Abstande e von der Falllinie befindliche Verticale.

In der dritten allgemeinen Aufgabe hatten wir diesen Abstand mit c_1 bezeichnet und gemäss den dort eingeführten Grössen

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } e_1 \text{ den Werth } \dfrac{Pa}{4K} \\ \;\;\text{"} \;\; c \;\;\text{"} \;\;\;\; \text{"} \;\; \dfrac{4Kg}{Pa} \end{array}\right\} \text{gefunden.}$$

Letzteren in obige Gleichung eingesetzt, giebt

$$e = \frac{Pa}{4K},$$

also ist $e = e_1$ und die dort gefundene Verticale identisch mit der hier gefundenen.

Als **Polcurve** kann keine andere Curve existiren, als **der Kreis, dessen Durchmesser** e ist.

In Bezug auf das Beschleunigungscentrum ergiebt sich hier folgende sehr einfache Construction:

die allgemeine Gleichung für den Durchmesser des Tangentialkreises

$$d' = \frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}} \text{ (vergl. S. 119)}$$

geht, wenn wir

$$\Omega = ct; \quad \frac{d\Omega}{dt} = c \text{ und } U = v$$

einsetzen, über in

$$d' = vt.$$

Nun ist

$$t = \frac{v}{g}, \text{ also } d' = \frac{v^2}{g}.$$

Hat der Massenmittelpunkt die Höhe h durchfallen, so ist

$$2gh = v^2, \text{ also } h = \frac{v^2}{2g},$$

daher

$$\frac{d'}{2} = h.$$

Nehmen wir demnach die durchfallene Höhe h in den Zirkel und machen in der Richtung der Geschwindigkeit des Pols die Strecke $\mathfrak{P}A = h$, so ist A der Mittelpunkt des Tangentialkreises. Beschreiben wir um diesen einen Kreis, so schneidet derselbe den Wendekreis im Beschleunigungscentrum S. Diese Construction wiederholt, liefert die Curve der Beschleunigungscentra, welche die verticale Falllinie zur Asymptote hat.

2) **Beispiel.** Ein unveränderliches System bewege sich mit seinem Mittelpunkte auf gerader Bahn und constanter Geschwindigkeit. Die Winkelgeschwindigkeit Ω wachse proportional der Zeit.

§. 66. Praktisch würden wir diese Bewegung verwirklichen, wenn wir die in der allgemeinen Aufgabe S. 60 angenommene kreisförmige Scheibe sammt dem beschleunigenden Gewichte mit constanter Geschwindigkeit in gerader Bahn fortbewegen und die Schwere des Gewichtes K auf Beschleunigung der Winkelgeschwindigkeit um den Mittelpunkt der Scheibe wirken lassen. Hier ermitteln wir die Gestalt der Polbahn ebenso leicht durch Rechnung, als durch Construction (Fig. 50, Taf. V).

Sei x die Abscisse der Polbahn, v die constante Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes M, so ist $v = \frac{x}{t}$ oder $t = \frac{x}{v}$, ferner ist der Annahme nach $\Omega = ct$ (c eine Constante). Setzen wir diese Werthe in die Gleichung $e = \frac{v}{\Omega}$ ein, so folgt

$$e = \frac{v}{ct}; \quad e = \frac{v^2}{cx}.$$

e ist die Ordinate, x die Abscisse der Polbahn, mithin dieselbe eine gleichseitige Hyperbel, mit der Bahn des Massenmittelpunktes und der durch O gehenden Y-Axe als Asymptote.

Die Gleichung der Polcurve ergiebt sich durch Integration der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega = ct,$$

woraus

$$\varphi = \frac{ct^2}{2}$$

folgt, wenn für $\varphi = o$ auch $t = o$ ist.

Wir hatten $e = \frac{v}{ct}$ gefunden; die Elimination der Zeit t ergiebt

$$\varphi = \frac{c}{2} \frac{v^2}{c^2 e^2}$$

und hieraus folgt

$$e^2 = \frac{v^2}{2c.\varphi}.$$

Die Polcurve ist eine Spirale, welche aus der Unendlichkeit kommend (Y-Axe ist Asymptote) in unendlich vielen Windungen um O herum läuft, und in O endet.

Der Durchmesser des Wendekreises ist die zwischen dem Pol und der geraden Bahn liegende Strecke der Normalen, der Massenmittelpunkt selbst das Beschleunigungscentrum, weil die Beschleunigung des ersteren (seine Geschwindigkeit ist constant und seine Bahn gerade) gleich Null ist. Der Ort aller Beschleunigungscentra ist also die Bahn des Massenmittelpunktes.

III. Theil.

Ueber die Wirkungen äusserer Kräfte in Mechanismen (zwangläufig bewegten unveränderlichen Systemen von Massen).

Einleitung.

§. 67. Einen Mechanismus definirt man bekanntlich als ein System materieller Punkte, welche fest mit einander verbunden sind, und von denen auf irgend eine Weise mehrere Punkte so bewegt werden, dass dadurch die Bewegung aller übrigen Punkte des Systems vollständig bestimmt ist.

Solche in vorgeschriebenen Bahnen sich bewegende unveränderliche Systeme, welche ich in der Folge nach dem Vorgange Reuleaux's zwangläufig bewegte Systeme nennen will, spielen in der Maschinenlehre eine sehr bedeutende Rolle, weil jede Maschine schliesslich als Combination einer gewissen Anzahl von Mechanismen, die in ganz bestimmter Weise zwangläufig mit einander verbunden sind, definirt werden kann.

Es erscheint daher geboten, dass wir zunächst die Kraftwirkungen in einem einzelnen Mechanismus studiren.

Ich kann nicht umhin an dieser Stelle der Entstehung und Bildung von Mechanismen zu gedenken, welche in Reuleaux's

schätzenswerthen Arbeiten*) eine überaus wichtige Rolle spielt. Reuleaux erzeugt einen Mechanismus, indem er ein Glied einer geschlossenen kinematischen Kette festhält. „Geschlossene kinematische Kette“ nennt Reuleaux eine derartige bewegliche Verbindung von Gliedern (starren Punktsystemen), dass die Relativbewegung irgend eines Gliedes zu irgend einem andern stets dieselbe ist. Durch Festhalten eines Gliedes geht die Relativbewegung in eine ganz bestimmte absolute Bewegung über. Auf diese Weise gelangt Reuleaux zu der im Anfange gegebenen Definition eines Mechanismus.

Ohne die Bedeutung dieser von Reuleaux angegebenen Erzeugungsweise von Mechanismen zu verkennen, die für die Herleitung und für das Verständniss derselben und ganzer Maschinen überaus werthvoll erscheint, sehe ich mich doch genöthigt, in den nachfolgenden Untersuchungen einen Mechanismus so zu deuten, dass er der mathematischen Behandlung insbesondere derjenigen der kinematischen Geometrie (geometrische Bewegungslehre) zugänglich wird. Diese durch die Tendenz meines Werkes gebotene und rein mechanischen Principien entlehnte Deutung eines Mechanismus, giebt den nachfolgenden Untersuchungen eine eigene Richtung, die vollständig unabhängig von den Arbeiten Reuleaux's auf dem Fundament der kinematischen Geometrie als wissenschaftlichen Basis zu neuen grösstentheils originalen Sätzen und Constructionen führen wird. An der Hand derselben werden wir dann einen überaus klaren Blick in die Kraftwirkungen gewinnen, denen einzelne Mechanismen und ganze Maschinen ausgesetzt sind. —

Gehen wir nun zu unserer Definition eines Mechanismus über, so wollen wir zunächst als Typus desselben das Kurbelgetriebe in allgemeinster Anordnung wählen und an diesem das Wesen eines einfachen Mechanismus klar legen.

Ein Kurbelgetriebe allgemeinster Anordnung bilden wir, indem wir vier Stangen (mathematisch als unveränderliche Punktsysteme von beliebiger Ausdehnung gedacht) drehbar mit einander verbinden, so dass wir ein Gelenkviereck erhalten. Legen wir die

*) Vergl. „Grundzüge der theoretischen Maschinen-Getriebelehre“ von Reuleaux in den Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleiss 1872 u. 1873.

eine Stange AD im Raume fest (in Fig. 1, Taf. VII durch Schraffur angedeutet), so erhalten wir ein Kurbelgetriebe allgemeinster Anordnung. In demselben spielt nun — und dies ist eine Hauptabweichung von der Reuleaux'schen Erzeugungsweise eines Mechanismus, weil wir von der Gleichwerthigkeit der vier Glieder einer kinematischen Kette abstrahiren — die festgehaltene Stange AD für unsere Untersuchungen keine Rolle, statt dessen nehmen wir eine unabänderliche feste Lage der Drehpunkte A und D an.

Die beiden Stangen AB und CD, welche sich um Zapfen der festgehaltenen Stange AD drehen, und deren Punkte concentrische Kreise um feste Mittelpunkte beschreiben, sind als Kurbeln zu betrachten, welche zwei Punkte der vierten Stange auf Kreisbögen leiten und dadurch die zwangläufige Bewegung derselben herbeiführen. Für unendlich kleine Lagenänderungen des Systems ersetzen die beiden Kurbeln AB und CD die Krümmungsradien beliebig gestalteter Curven und sind dann die Kurbelkreise um A und D als Krümmungskreise der Curven zu betrachten, welche die Zwangläufigkeit des Systems bedingen. Die Stangen BC, mit welchen ein ganz beliebig gestaltetes starres System fest verbunden sein mag (vergl. Fig. 51), während die Stangen AB und CD als starre Linien aufzufassen sind, wollen wir das eigentlich zwangläufig bewegte System oder kurz einen Mechanismus (im engern Sinne) nennen.

In solch einem Mechanismus erfolgt die Bewegung sämmtlicher Punkte aus einer Lage in die nächst folgende relativ in derselben Zeit und, da die Grösse der Bewegung durch den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg gemessen wird (d. i. die Bahngeschwindigkeit des Punktes), so ist einleuchtend, dass die Geschwindigkeiten sämmtlicher Punkte eines Mechanismus bekannt sind, wenn die Geschwindigkeit eines einzigen Punktes gegeben ist. Die kinematische Geometrie lehrt die Geschwindigkeit der Punkte eines Mechanismus construiren und berechnen. —

§. 68. Was nun die Wirkungen von Kräften in Mechanismen betrifft, so haben wir zwei Hauptgesichtspunkte festzustellen; Kräfte, welche von aussen her auf den Mechanismus einwirken, denselben entweder in einer Gleichgewichtslage erhalten, oder in

einen Bewegungszustand versetzen, wollen wir äussere Kräfte nennen.

Beim Kurbelmechanismus der Dampfmaschine sind z. B. der treibende Dampfdruck und der zu überwindende Widerstand die äusseren Kräfte.

Kräfte hingegen, welche in Folge der Art der Zwangläufigkeit des Mechanismus in bestimmter Grösse und Richtung durch die äusseren Kräfte als Zug- und Druckspannung etwa in den Kurbeln, oder als Normaldrücke auf die Curven der zwangläufig bewegten Punkte, im zwangläufig bewegten System selbst, wie in den Festpunkten des Systems hervorgerufen werden, wollen wir, wie es üblich ist, Bedingungskräfte nennen.

Eine Aenderung der Zwangläufigkeit des Mechanismus beeinflusst die Grösse und Richtung der Bedingungskräfte, aber nicht die der äusseren Kräfte. Dies ist ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal der beiden Arten von Kräften. Machen wir für die Folge die Annahme, dass die Verbindungstheile des Mechanismus (Kurbeln, Festpunkte), sowie der Mechanismus, d. h. das zwangläufig bewegte System, jedem Zug oder Druck, überhaupt jeder Bedingungskraft eine gleich grosse und gleich gerichtete Kraft entgegensetzen (und diese Forderung muss die Praxis stets erfüllen, widrigenfalls das System keinen Anspruch auf Festigkeit machen darf), so haben wir dadurch die Bedingungskräfte eliminirt und können nun die Wirkungen äusserer Kräfte in Mechanismen näher untersuchen.

Wir behandeln in der Folge nur die Wirkungen der äusseren Kräfte in **Mechanismen, deren Bewegung parallel einer Ebene vor sich geht,** ebenso nehmen wir an, dass die äusseren Kräfte auch sämmtlich **in der Ebene des Mechanismus** liegen.

Diesem Specialfalle lassen sich fast alle Probleme unterordnen, die für die Praxis von Wichtigkeit sind.

VI. Kapitel.

Ueber das Gleichgewicht äusserer Kräfte in einem einfachen Mechanismus.

A) Herleitung der Gleichung für das Gleichgewicht zweier Kräfte.

§. 69. **Aufgabe.** Es soll die Kraft Q bestimmt werden, welche der Kraft P in einem einfachen Mechanismus das Gleichgewicht hält. Letztere ist der Grösse und Richtung nach, erstere der Richtung nach gegeben.

Es seien B, C, Fig. 52, Taf. VII, die beiden Punkte eines beliebig gestalteten in sich unveränderlichen Systems (Mechanismus), welche gezwungen sind, sich auf den beiden Curven ζ und ϑ zu bewegen.*)

Wenn wir das System unendlich wenig aus seiner Lage bringen, so können wir die Verschiebung seiner einzelnen Punkte, insbesondere von B und C, als eine momentane Drehung um den Pol $\mathfrak{P}$ (augenblicklichen Drehpunkt) betrachten, den wir erhalten, wenn wir die Normalen AB und CD bis zum gegenseitigen Schnitt verlängern. Nennen wir die Geschwindigkeit des Punktes B, u, diejenige des Punktes C, v, die bezüglichen Entfernungen von $\mathfrak{P}$, b und c, ferner Ω die bekanntlich für alle Punkte des Mechanismus constante Winkelgeschwindigkeit um den Pol, so ist

$$u = b\Omega, \quad v = c\Omega$$

$$\text{also } \frac{u}{v} = \frac{b}{c}.$$

*) Sowohl hier, als in den späteren Kapiteln, werden wir meistens annehmen, dass die Angriffspunkte der Kräfte gleichzeitig die zwangläufig geführten Punkte des Mechanismus sind. Die Herleitung der Sätze gewinnt dadurch an Uebersichtlichkeit, während die Allgemeinheit des Beweises keine Einbusse erleidet; denn man kann im unendlich kleinen Augenblick der Bewegung dem Mechanismus dieselbe Zwangläufigkeit ertheilen, indem man die Krümmungsradien der Bahnen der nicht mit B und C zusammenfallenden Angriffspunkte der beiden äusseren Kräfte mit den zu B und C gehörigen Krümmungsradien vertauscht und diese wieder als Kurbeln definirt.

Die Richtungen der Kräfte P und Q mögen mit den bezüglichen Geschwindigkeitsradien b und c die Winkel β und γ bilden. Dann werden die Componenten $P\cos\beta$ und $Q\cos\gamma$ durch die Kurbeln AB und CD aufgenommen, und nur die Componenten $P\sin\beta$ und $Q\sin\gamma$, welche in die Richtungen der Bahngeschwindigkeiten der Punkte B und C fallen, haben Einfluss auf die Bewegung derselben. Da nun aber für das Gleichgewicht beider Kräfte offenbar die Proportion:

$$P\sin\beta : Q\sin\gamma = u : v$$

erfüllt sein muss, aber $\frac{u}{v} = \frac{b}{c}$ ist, so folgt

$$P\sin\beta : Q\sin\gamma = c : b$$

$$Q = \frac{b}{c} \frac{P\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Aus dieser Gleichung würde man Q bestimmen können.

Sie lässt sich aber noch in folgende überführen:

Wenn wir vom Pol $\mathfrak{P}$ auf die gegebenen Richtungen von P und Q die Lothe p und q fällen, so folgt

$$b\sin\beta = p, \qquad c\sin\gamma = q,$$

die obige Gleichung geht also über in

$$Pp = Qq,$$

$$\text{oder } Pp - Qq = 0.$$

Bezeichnen wir den Drehungssinn einer Kraft um den Pol als Drehpunkt mit dem Zeiger der Uhr durch ein + Zeichen, gegen den Zeiger der Uhr durch ein — Zeichen, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz. Zwei äussere Kräfte halten sich in einem Mechanismus das Gleichgewicht, wenn die Summe ihrer Momente in Bezug auf den Pol als Momentenmittelpunkt und mit Berücksichtigung des Drehungssinnes = 0 ist.

In der Praxis liegt oft der Fall vor, dass die Kräfte nicht in Punkten angreifen, welche dem zwangläufig bewegten System angehören, sondern in irgend einem Punkte der Kurbeln.

Beim allgemeinen Kurbelgetriebe, Fig. 53, Taf. VII, ist die Aenderung der Angriffspunkte der äusseren Kräfte abhängig von

der Lage und der Entfernung der in den bezüglichen Kurbelkreisen geführten Punkte des bewegten Systems (hier also der geraden Strecke BC). Will man in diesem Falle Gebrauch von dem obigen Satze machen, so muss man die Kräfte mit gleichartig wirkenden so vertauschen, dass die Bedingung der Unabänderlichkeit der Entfernung beider Angriffspunkte gewahrt bleibt.

Wir können diese Verlegung der äusseren Kräfte auf folgende Art vornehmen.

Die Kurbeln AB und CD seien (vergl. Fig. 53, Taf. VII) über die Punkte B und C hinaus verlängert und in E und F greifen die Kräfte P und Q an.

Die Wirkung der Kraft P auf den Kurbelarm AE wird gemessen durch ihr Moment in Bezug auf A als Drehpunkt. Dasselbe sei Pr.

Denken wir uns in B eine zu P parallele Kraft P_1 substituirt, so ist deren Wirkung auf den Kurbelarm dieselbe, sobald nur ihr Moment um A, $P_1 r_1 = Pr$ ist. Die substituirte Kraft P_1 bestimmt sich somit aus der Gleichung

$$P_1 = \frac{Pr}{r_1}.$$

Ganz analog substituiren wir für Q eine parallele Kraft Q_1 in C, die durch die Gleichung

$$Q_1 = \frac{Qs}{s_1}$$

bestimmt ist.

s und s_1 sind die bezüglichen Hebelarme von D aus.

Jetzt können wir, da die Angriffspunkte der Kräfte P_1 und Q_1 dem zwangläufig bewegten System angehören, obigen Satz anwenden und erhalten die Gleichung:

$$P_1 p = Q_1 q,$$

$$\text{oder } \frac{Pr}{r_1} p = \frac{Qs}{s_1} q.$$

2) Graphische Construction des Gleichgewichts von zwei Kräften.

§. 70. Nach dem Princip der virtuellen Geschwindig-

keiten*) findet Gleichgewicht zwischen den beiden Kräften statt, wenn die Summe ihrer virtuellen Momente gleich Null ist. Da diese gleich dem virtuellen Moment der Resultante ist, findet auch Gleichgewicht im System statt, wenn das virtuelle Moment der Resultante gleich Null ist. Bezeichnen wir letztere mit T, die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes mit δt, so ist Gleichgewicht der äusseren Kräfte vorhanden, wenn $T\delta t = 0$ ist.

T ist eine bestimmte Grösse. Das Product $T\delta t$ ist also $= 0$, wenn $\delta t = 0$ ist, d. h. wenn die Richtung der virtuellen Geschwindigkeit des Angriffspunktes der Resultante senkrecht auf dieser steht. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der Angriffspunkt der Resultante auf einer Geraden liegt, welche nur Rotationsgeschwindigkeit, keine Geschwindigkeit in ihrer eignen Richtung besitzt, und dies ist jede Linie, welche durch den Pol geht.

Daraus folgern wir den

Satz. Zwei äussere Kräfte halten sich in einem Mechanismus das Gleichgewicht, wenn ihre Resultante durch den Pol geht.

Die Kraftrichtungen von P und Q schneiden einander in E (Fig. 54). Tragen wir von E die Kraft P der Grösse nach auf, $GE = P$, und ziehen durch G eine Parallele zur Richtung von Q, so schneidet diese die Verbindungslinie $E\mathfrak{P}$ in F. Die Seite EH des vervollständigten Parallelogrammes giebt die gesuchte Grösse von Q.

Diese graphische Construction deckt sich mit dem Momentensatz: Fällen wir nämlich von F dem andern Eckpunkte des Pa-

*) Im Worte „virtuell" liegt die Allgemeinheit dieses Princips ausgesprochen, wonach die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte durchaus nicht die wirklich stattfindenden, sondern auch gedachte sein können. Letztere sind unbedingt einzuführen, wenn man das Gleichgewicht der inneren (Bedingungs-) Kräfte unter einander und mit den äusseren Kräften bestimmen will. Nun haben wir aber, wie in der Einleitung zu Theil III gesagt ist, durch die Annahme, dass sämmtliche Bedingungskräfte durch gleiche und entgegengesetzte innere Kräfte aufgehoben werden sollen, sämmtliche Kraftwirkungen mit Ausnahme derjenigen der äusseren Kräfte eliminirt. Folglich reduciren sich die virtuellen Geschwindigkeiten für unsere Zwecke auf wirklich statthabende mit der Zwangläufigkeit des Systems verträgliche Geschwindigkeiten.

rallelogrammes auf die Seiten EB und EC die beiden Lothe p_1 und q_1, ferner von $\mathfrak{P}$ die Lothe p und q, so verhält sich $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$.

Es genügt also aus dem bei E gebildeten Parallelogramm die Gleichung

$$Pp_1 = Qq_1 \text{ herzuleiten.}$$

Es ist $\measuredangle x = \measuredangle y$, und da die $\triangle\triangle GFJ$ und HFK bei J und K rechtwinkelig sind, so sind sie einander ähnlich, und es folgt die Proportion

$$\frac{GF}{HF} = \frac{Q}{P} = \frac{p_1}{q_1},$$

also ist bewiesen, dass $Pp_1 = Qq_1$,

resp. $Pp = Qq$ ist.

Specialfall. Wenn die beiden Kräfte P und Q, welche einander das Gleichgewicht halten, mit den Bahngeschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte gleiche Richtung haben, so ist die Grösse der gesuchten Kraft Q sehr leicht folgendermassen zu finden. Fig. 55.

Tragen wir auf dem Geschwindigkeitsradius*) des Angriffspunktes von Q, von C aus die Strecke $CC' = P$ auf und ziehen durch C' eine Parallele zu BC, so ist $BB' = Q$; denn es verhält sich

$$\frac{Q}{P} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{\mathfrak{P}B}{\mathfrak{P}C} = \frac{p}{q} = \frac{u}{v}.$$

B) Gleichgewicht mehrerer Kräfte.

§. 71. Wir gehen jetzt zur Gleichgewichtsbedingung zwischen mehr als zwei Kräften über und stellen die

Aufgabe. Wenn mehrere (n) Kräfte auf den Mechanismus wirken, so soll die Grösse und Richtung von (n — 1) Kräften und die Richtung der n^{ten} Kraft gegeben sein. Gesucht wird die Grösse der n^{ten} Kraft.

Diese allgemeine Aufgabe ist auf die frühere mit zwei Kräften zurückgeführt, wenn wir die (n — 1) Kräfte graphostatisch zu

---

*) Mit „Geschwindigkeitsradius eines Punktes" bezeichnet man den Abstand des Punktes vom Pol.

einer Resultante vereinigen. Nennen wir dieselbe T_{n-1} die n^{te} Kraft X, so muss, wenn Gleichgewicht aller Kräfte im System vorhanden sein soll, die Resultante (T_{n-1}, X) nach unserm für zwei Kräfte ausgesprochenen Satze durch den Pol gehen.

Nun ist das Moment von T_{n-1} in Bezug auf den Pol gleich der Summe der Momente sämmtlicher (n — 1) Kräfte und für das Gleichgewicht der Resultante T_{n-1} mit X ist es nach der zweiten Fassung unseres Satzes nöthig, dass das Moment (T_{n-1}) gleich dem Moment (X) ist. Wir haben daher in zweifacher Fassung den allgemeineren

Satz. I. Wenn beliebig viel äussere Kräfte auf einen einfachen Mechanismus wirken, so halten sie einander das Gleichgewicht, wenn ihre Resultante durch den Pol geht.

II. Sie halten einander das Gleichgewicht, wenn die Summe ihrer Momente in Bezug auf den Pol als Drehpunkt mit Berücksichtigung des Drehungssinnes gleich Null ist.

Ich übergehe eine Anwendung dieses Satzes auf besondere Beispiele und verweise auf die Resultate, welche in meiner im Civilingenieur 1872 erschienenen Abhandlung: „die Mechanik der Centrifugalregulatoren etc.“ enthalten sind. Dieselben haben sich allein durch die Anwendung dieses allgemeinen äusserst fruchtbaren Satzes auf den Mechanismus des Centrifugalregulators ergeben.

C) Construction der Gleichgewichtslagen eines einfachen Mechanismus.

§. 72. Wir haben im vorhergegangenen Abschnitte die Zwangläufigkeit eines Mechanismus als gegeben betrachtet und nach dem Gleichgewicht der äusseren Kräfte gefragt, bei welchem der Mechanismus seine Lage nicht ändert. Diese Aufgabe ist einer Umkehrung fähig, indem man die Kräfte giebt und nach der Lage, resp. nach der Art der Zwangläufigkeit fragt, bei welcher der Mechanismus unter der Wirkung der gegebenen Kräfte im Gleichgewicht ist.

Nehmen wir an, dass sämmtliche Kräfte, welche auf den Mechanismus wirken, der Grösse und Richtung nach gegeben sind, so können wir dieselben zu einer Resultante vereinigen. Es können nun zwei Fälle eintreten: die Richtung der Resultante ist für alle Lagen, welche der Mechanismus einnehmen kann, constant oder veränderlich.

Fall I) α) Die Zwangläufigkeit des Mechanismus und die Richtung der Resultante sei gegeben. —

Wir wählen (Fig. 56) den Angriffspunkt E der Resultante auf der Verbindungslinie der zwangläufig geführten Punkte BC, obgleich seine Lage in der Richtung der Resultante ganz beliebig angenommen werden kann, und verzeichnen die Curve, welche der Angriffspunkt E in der Ebene beschreibt. Ziehen wir an dieselbe eine Tangente, welche senkrecht auf der Richtung der Resultante steht, so fixirt der Tangirungspunkt die gesuchte Gleichgewichtslage des Mechanismus; denn bei einer unendlich kleinen Verschiebung desselben leistet die Resultante keine Arbeit, weil der Weg ihres Angriffspunktes senkrecht auf ihrer Richtung steht.

β) Es kann der Fall vorliegen, dass die Art der Zwangläufigkeit nicht direct gegeben ist, sondern erst aus der Natur der Aufgabe gefolgert werden muss.

Hierzu folgende

Aufgabe. Eine starre materielle Curve AB, Fig. 57, sei gezwungen mit einem ihrer Punkte längs einer gegebenen festliegenden Curve MN zu gleiten. Im Punkte B wirke vertical ihr Gewicht P. Auf welcher Curve muss sich die bewegliche Curve AB stützen, wenn sie in jeder Lage im Gleichgewicht sein soll?

Wir lösen diese Aufgabe in folgender Weise:

Wenn die Kraft P während der Bewegung der Curve AB keine Arbeit leisten soll — denn dies ist eben die Gleichgewichtsbedingung — so muss sich B in einer horizontalen Geraden bewegen. Der Schnittpunkt der Kraftrichtung und der Normalen der Curve MN in A ist der Pol $\mathfrak{P}$ und die durch den Pol $\mathfrak{P}$ normal zur Curve AB gezogene Gerade giebt den augenblicklichen Stützpunkt S der gesuchten Curve. Die Verbindungscurve

sämmtlicher auf diese Weise construirten Stützpunkte ist die gesuchte Curve.

In Lehrbüchern der Mechanik wird oft ein Specialfall dieses Problems behandelt: Die Curve MN ist eine verticale Gerade, AB eine schwere gerade Linie, für welche die stützende Curve die Enveloppe der bewegten Geraden AB ist.

Noch eine andere in Lehrbüchern der Mechanik oft behandelte Aufgabe lässt sich auf die angegebene Art zeichnerisch sehr leicht lösen:

γ) **Aufgabe.** Es sind vier Sparren von bestimmter Länge und Schwere gegeben. Dieselben bilden ein sogenanntes Mansarddach. Die Spannweite ist gegeben. Es soll die Höhe des Daches ermittelt werden, so dass die Sparren einander das Gleichgewicht halten.

Bei einer Verschiebung des Systems bewegt sich der Endpunkt C des oberen Sparrens auf einer Verticalen (siehe Fig. 58), Endpunkt B des unteren Sparrens im Kreis um A; in B seien die beiden Sparren drehbar mit einander verbunden, somit können wir den Sparren BC als ein zwangläufig bewegtes System betrachten.

In der Mitte des Sparrens AB wirkt die Schwere G vertical abwärts. Dieselbe können wir, ohne die Wirkung der Kräfte zu ändern, sich selbst parallel und halb so gross nach B verlegen. G_1 vereinigt sich mit P, der Schwere des oberen Sparrens, zu einer Resultante R, deren Angriffspunkt in allen Lagen, welche das System annehmen kann, denselben Abstand DC hat.

Zur Ermittelung der Gleichgewichtslage des Systems verzeichnen wir die Bahn, welche Punkt D bei fortgesetzter Verschiebung des Systems beschreibt, ziehen an dieselbe die horizontale Tangente und finden durch den Tangirungspunkt D_1 die Lage, in welcher die Sparren einander das Gleichgewicht halten.

Soll die gezeichnete Lage der Sparren die Gleichgewichtslage sein, so giebt die Verticale durch den Pol die Lage der Resultante und die Zerlegung derselben in die Componenten bei B und F bestimmt das einzuhaltende Verhältniss der Gewichte beider Sparren.

Fall II) α) Die Zwangläufigkeit sei gegeben und die Richtung der Resultante der äusseren Kräfte gehe stets durch einen festen Punkt O. Fig. 59.

Hier ist die Construction eine ganz analoge, wie in Fall I α. Man zeichne sich die Curve des Angriffspunktes E, den man auch hier zweckmässig auf der Verbindungsstrecke der beiden zwangläufig geführten Punkte B und C wählt, und beschreibe um den Punkt O einen diese Curve tangirenden Kreis. Der Tangirungspunkt bestimmt die Gleichgewichtslage des Systems. Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird ebenfalls aus der Thatsache gefolgert, dass bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Systems die Resultante keine Arbeit leistet.

β) Die Richtung der Resultante sei veränderlich und zwar sei das Gesetz der Veränderlichkeit durch die Curve gegeben, welche die continuirlich auf einander folgenden Resultantenrichtungen umhüllen. Ferner sei die Zwangläufigkeit gegeben, also auch die Bahn, welche der Angriffspunkt der Resultante während der Bewegung des Systems beschreibt.

Man ziehe, Fig. 60, eine Tangente an die von den Resultanten umhüllte Curve, welche senkrecht auf der Bahn des Angriffspunktes steht. Der Fusspunkt derselben bestimmt die Gleichgewichtslage des Systems. Umgekehrt kann auch nach der Zwangläufigkeit des Mechanismus gefragt werden, der Art, dass derselbe in jeder Lage im Gleichgewicht ist. Hierzu folgende

γ) **Aufgabe.** Die Richtungsänderung der Resultante soll durch die von ihr umhüllte Curve gegeben sein. Es soll die Zwangläufigkeit des Mechanismus so bestimmt werden, dass derselbe unter der Wirkung der gegebenen Kräfte in jeder Lage im Gleichgewicht ist. Fig. 61.

Die gestellte Bedingung verlangt, dass bei fortgesetzter Verschiebung des Systems die Resultante stets senkrecht auf dem zugehörigen Wegelement ihres Angriffspunktes E steht; dies ist der Fall, wenn die gesuchte Bahn desselben die Evolvente der von der Resultante umhüllten Curve ist. Ist erstere gezeichnet, so ist nur nöthig, noch für einen Punkt, z. B. C, des Systems, die Curve zu geben, welche denselben zwangläufig führen soll:

Jede dritte, die Zwangläufigkeit eines andern Punktes des Systems, z. B. B, herbeiführende Curve kann nun ohne Weiteres verzeichnet werden, und diese, wie die gegebene Curve des Punktes C, führen das System so, dass die gestellte Forderung erfüllt wird.

Als ein sehr gutes Kriterium für die Genauigkeit der Construction haben wir bei allen behandelten Aufgaben zu beachten, dass in der Gleichgewichtslage die Resultante durch den Pol geht.

D) Beanspruchung der Verbindungstheile eines Mechanismus, wenn sich zwei Kräfte in den zwangläufig geführten Punkten das Gleichgewicht halten.

§. 73. Halten sich in B und C, Fig. 62, Taf. VIII, die beiden Kräfte P und Q das Gleichgewicht, so können wir das ganze System als ein ruhendes, in sich festes, betrachten; P und Q werden dann, wie bekannt, nach den Richtungen AB, BC, CD zerlegt, indem man bei B und C die bezüglichen Parallelogramme bildet.

Die Bildung derselben können wir aber auch folgendermassen herleiten:

Denken wir uns für den Augenblick die starre Linie BC, welche in Fig. 62 das zwangläufig bewegte System ist, im Fusspunkte E des von $\mathfrak{P}$ auf BC gefällten Lothes durchschnitten, so werden wir, um das Gleichgewicht wiederherzustellen, in der Schnittfläche bei E zwei Kräfte S anbringen müssen, die gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, und von denen die eine der Kraft P, die andere der Kraft Q das Gleichgewicht hält. Da der Geschwindigkeitsradius s der Hebelarm der Kraft S ist, so müssen für das Gleichgewicht der Kräfte P und S, resp. Q und S die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Ss &= Pp \\ Ss &= Qq \end{aligned}\right\} \text{ erfüllt sein.}$$

Hieraus folgt, dass die Componenten von P und Q, welche in die Richtung von BC fallen, einander gleich sind. Da nun P und Q eine gemeinschaftliche Resultante T haben, die beiden soeben genannten Componenten sich gegenseitig aufheben, so muss

T auch die Resultante der beiden in die Richtung der Geschwindigkeitsradien fallenden Componenten sein. Umgekehrt kann man also diese Componenten finden, wenn man die Resultante nach den Geschwindigkeitsradien zerlegt.

Wir können somit hinsichtlich der Beanspruchung der Verbindungstheile eines Mechanismus, folgenden Satz aufstellen:

Satz. Wenn in einem einfachen Mechanismus zwei Kräfte einander das Gleichgewicht halten und ihre Angriffspunkte sind die zwangläufig geführten Punkte, so folgt:

1) Das Moment der durch die äusseren Kräfte in der Verbindungsstrecke der beiden Angriffspunkte hervorgerufenen Spannung ist gleich jedem der beiden äusseren Kraftmomente in Bezug auf den Pol.

2) Man erhält den Normaldruck der Bahnen, in denen die Angriffspunkte der beiden äusseren Kräfte gezwungen sind, sich zu bewegen, wenn man die Resultante nach den Geschwindigkeitsradien der beiden Angriffspunkte zerlegt.

Verallgemeinerung.

§. 74. Wir haben bisher nur den einfachsten, aber gerade in der Praxis sehr oft vorkommenden Fall untersucht. Gehen die Richtungen der beiden äusseren Kräfte nicht durch die zwangläufig geführten Punkte, oder wirken mehr als zwei Kräfte im System, die einander das Gleichgewicht halten, so können wir zunächst wieder die durch den Pol gehende Resultante construiren und dieselbe in die Richtungen der Kurbeln, resp. der Geschwindigkeitsradien der zwangläufig geführten Punkte zerlegen. Der zweite Theil des Satzes gilt ohne Weiteres auch für diesen allgemeinen Fall. In wieweit der erste Theil des Satzes Anwendung findet, übergehen wir hier. Ueberhaupt erfordert die Beanspruchung der Verbindungstheile eines Mechanismus, wenn sie erschöpfend sein soll, eine dynamische Analyse, denn in der Praxis haben wir es stets mit Mechanismen zu thun, die eine bestimmte Masse besitzen und sich in einem gewissen Bewegungszustande befinden. Die Massendrücke, welche hierbei auftreten,

beanspruchen die Verbindungstheile eines Mechanismus in höchst complicirter Weise.

Wie weit und in welchen Fällen eine Lösung dieses Problems möglich ist, werden die in einem späteren Kapitel angestellten Untersuchungen lehren.

VII. Kapitel.

Ueber das Gleichgewicht äusserer Kräfte in einem System einfacher Mechanismen, die in ihrer Bewegung von einander abhängig sind.

A) Construction des Gleichgewichtes der äusseren Kräfte.

§. 75. Jede Maschine lässt sich in eine Reihe einfacher Mechanismen zerlegen, die so von einander abhängig sind, dass durch die Geschwindigkeit eines einzigen Punktes, der irgend einem einfachen Mechanismus angehört, die Geschwindigkeit sämmtlicher Punkte des maschinellen Systems (Maschine)*) bestimmt ist.

Wir können diese Abhängigkeit der einzelnen Punkte hinsichtlich ihrer Geschwindigkeiten zweckmässig in der Weise definiren, dass wir sagen:

In jeder Maschine, deren Punkte sich zwangläufig in bestimmten Bahnen bewegen, sind die Geschwindigkeiten Functionen einer Urvariabeln. Diese und die nun folgende Betrachtungsweise, welche Reuleaux in seiner Kinematik (Maschinengetriebelehre) mit grossem Geschick verwerthet, leistet auch hier treffliche Dienste.

Wir können nämlich hinsichtlich der Bewegungsübertragung in einer Maschine Folgendes feststellen:

Ein Mechanismus ist bestimmt, die äussere Kraft aufzunehmen, ein anderer, sie abzugeben. Zwischen beiden Mechanismen befinden

---

*) Ich werde in der Folge auf den Vorschlag des Herrn Dr. Hartig in Dresden ein System einfacher Mechanismen, die in ihrer Bewegung von einander abhängig sind, „ein maschinelles System" nennen.

sich eine Reihe anderer, deren specielle Aufgabe es ist, entweder noch Zwischenkräfte aufzunehmen und dem letzten zuzuführen, oder auch nur durch die Art, wie sie die eingeleitete Kraft übertragen, zu bewirken, dass dieselbe in zweckentsprechender Weise verändert werde.

Da sämmtliche Mechanismen in fester Reihenfolge zu einander stehen, so wollen wir sie durch römische Zahlen I, II, III bezeichnen. Sind n Mechanismen vorhanden, so existiren $(n-1)$ Punkte, die je zwei aufeinanderfolgenden Mechanismen gemeinsam sind. In diesen Punkten sind die Mechanismen mit einander drehbar verbunden und kann die Bewegung dieses gemeinschaftlichen Punktes kinematisch aus der Bewegung eines jeden der beiden Mechanismen hergeleitet werden.

Für die Bestimmung des Gleichgewichtes der äusseren Kräfte in einer Maschine ist es durchaus nothwendig, diese charakteristischen Punkte aufzusuchen.

Wir lösen zunächst die einfachere

§. 76. **Aufgabe.** In einem maschinellen System wirken am ersten und letzten Mechanismus zwei Kräfte, deren Richtungen in die Tangente der Bahnen ihrer Angriffspunkte fallen. Es soll das Gleichgewicht dieser beiden Kräfte bestimmt werden.

In Fig. 63, Taf. VIII bilden drei Mechanismen I, II, III (bestehend aus starren Linien, von denen je zwei Punkte zwangläufig auf Kurbelkreisen geführt werden) ein maschinelles System. Die Punkte C und F sind zwei solcher vorhin definirter charakteristischer Punkte, weil sie zwei Mechanismen gleichzeitig angehören.

Es wirke nun in B, einem Punkte des Mechanismus I, senkrecht zum Geschwindigkeitsradius $\mathfrak{P}_1 B$ die der Grösse nach gegebene Kraft P, in G, einem Punkte des letzten Mechanismus III, senkrecht zum Geschwindigkeitsradius $G \mathfrak{P}_3$ die Kraft Q. Unsere Aufgabe verlangt nun, dass die Grösse von Q so bestimmt werden soll, dass Gleichgewicht im maschinellen System vorhanden ist.

Nennen wir die Bahngeschwindigkeit des Punktes B, u, des Punktes G, v, so ist offenbar Gleichgewicht vorhanden, wenn

$$\frac{P}{Q} = \frac{v}{u} \text{ ist.}$$

Man kann nun graphisch das Verhältniss $\frac{v}{u}$ sehr leicht in folgender Weise construiren.

Die Bahngeschwindigkeit des charakteristischen Punktes C sei w_1, diejenige des charakteristischen Punktes F sei w_2. Es verhalten sich nach einem bekannten kinematischen Lehrsatze die Bahngeschwindigkeiten zweier Punkte wie die bezüglichen Geschwindigkeitsradien. Daher folgt

$$\frac{u}{w_1} = \frac{\mathfrak{P}_1 B}{\mathfrak{P}_1 C} \text{ im Mechanismus I.}$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\mathfrak{P}_2 C}{\mathfrak{P}_2 F} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{II.}$$

$$\frac{w_2}{v} = \frac{\mathfrak{P}_3 F}{\mathfrak{P}_3 G} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{III.}$$

Nehmen wir auf dem Radius AB irgend einen beliebigen Punkt B' an, und ziehen durch B' zu $\overline{BC}$, $\overline{CF}$, $\overline{FG}$ die Parallelen $\overline{B'C'}$, $\overline{C'F'}$, $\overline{F'G'}$, so verhält sich

$$\frac{\mathfrak{P}_1 B}{\mathfrak{P}_1 C} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{u}{w_1}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_2 C}{\mathfrak{P}_2 F} = \frac{CC'}{FF'} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$\frac{\mathfrak{P}_3 F}{\mathfrak{P}_3 G} = \frac{FF'}{GG'} = \frac{w_2}{v}$$

durch Multiplication der

drei Gleichungen folgt: $\frac{BB'}{GG'} = \frac{u}{v}$,

also verhält sich auch $\frac{P}{Q} = \frac{GG'}{BB'}$.

Wählen wir somit von vornherein die Strecke $GG' = P$, so haben wir in der Strecke BB' die Kraft Q der Grösse nach gefunden.

Wie leicht einzusehen, stellt jede durch die beiden Parallelzüge $BCFG$ und $B'C'F'G'$ auf den bezüglichen Geschwindigkeitsradien von $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ abgeschnittene Strecke die Bahngeschwindigkeit um 90° gedreht dar, welche der Endpunkt des

Geschwindigkeitsradius, z. B. *H* als Punkt des Mechanismus I besitzt.

Haben die Kräfte *P* und *Q* Richtungen, welche nicht diejenige der Bahngeschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte sind, so hat man durch Zerlegung die Tangentialcomponente der Kraft *P* zu bilden und die Tangentialcomponente der Kraft *Q* der Grösse nach so zu bestimmen, dass sich beide Componenten das Gleichgewicht halten. Aus der Grösse der Componente findet man dann die Grösse der Kraft *Q*.

Was nun die Beanspruchung der Verbindungstheile des vorliegenden maschinellen Systems betrifft, so findet man, wenn die Annahme einer Gewichtslosigkeit der zwangläufig bewegten Systeme zulässig ist, die totale Beanspruchung der Kurbeln, sowie die Spannungen in den Verbindungsstrecken der charakteristischen Punkte am zweckmässigsten durch directe Zerlegung der Kraft *P* resp. *Q* in die bezüglichen Stangenrichtungen.

Sind aber im maschinellen System bestimmte Massen vertheilt und dies ist meistens in der Praxis der Fall, so ist zur genauen Ermittelung der Beanspruchung der einzelnen Theile, wie im Kapitel VI, §. 74 bereits erwähnt wurde, eine dynamische Analyse nothwendig.

Wir gehen jetzt zu einem allgemeineren Fall über:

§. 77. **Aufgabe.** Es wirken in den Zwischenmechanismen eines maschinellen Systems beliebig viel Kräfte von beliebiger Grösse und Richtung. Es sind $(n-1)$ Kräfte der Grösse und Richtung nach, die n^{te} Kraft der Richtung nach gegeben. Gesucht wird die Grösse derselben.

Wir construiren in dem Mechanismus, in welchem die n^{te} Kraft nur der Richtung nach gegeben ist, die Resultante der übrigen noch in demselben wirkenden Kräfte, ferner in jedem anderen Mechanismus die Resultante sämmtlicher in ihm gegebenen Kräfte. Da die Angriffspunkte dieser Einzelresultanten beliebig verschoben werden können, so wählen wir sie auf den Strecken, welche je zwei, aufeinander folgenden Mechanismen zugehörige Punkte, verbindet.

Nun können wir nach dem bei der vorigen Aufgabe beschriebenen Verfahren durch einen Parallelzug $A'B'C'D'E'$ (Fig. 64, Taf. VII), dessen Ecken in den bezüglichen Geschwindigkeitsradien dieser charakteristischen Punkte $ABCDE$ liegen, die Bahngeschwindigkeiten der Angriffspunkte der Einzelresultanten graphisch construiren. Nennen wir P irgend eine Einzelresultante, v die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes und α den Winkel zwischen den Richtungen beider, so ist Gleichgewicht zwischen allen Einzelresultanten, also auch zwischen allen gegebenen Kräften vorhanden, wenn $\Sigma(Pv\cos\alpha) = 0$ ist.

Es ist im Folgenden eine graphische Methode begründet, durch welche die Grösse der n^{ten} Kraft zu finden ist.

Wir tragen Fig. 64_a, von einem beliebigen Punkte M der Ebene aus, Strahlen ab, welche gleich und parallel den im maschinellen System, Fig. 64, für die Bahngeschwindigkeiten der Einzelresultanten gefundenen Strecken sind. An die Endpunkte r dieser Strahlen setzen wir die Einzelresultanten in unveränderter Grösse und Richtung an.

Denken wir uns nun die Winkel, welche die Strahlen r um M miteinander bilden, unveränderlich, so können wir bei jeder Einzelresultante den Werth $v\cos\alpha$ als Hebelarm definiren, der von M auf die zugehörige Kraftrichtung gefällt ist.

$\Sigma(Pv\cos\alpha)$ ist dann nichts anderes, als das Moment der Resultante von $(n - 1)$ Kräften um M als Momentenmittelpunkt. Die Richtung der n^{ten} Kraft X können wir ebenfalls in den Constructionsplan am Endpunkt der zugehörigen als Strahl aufgetragenen Geschwindigkeit v antragen. Der Hebelarm b der Kraft X ist somit bekannt, und es kann X aus der Gleichung

$$\Sigma(Pv\cos\alpha) = Xb$$

berechnet werden.

Nach den Methoden der Graphostatik ist das resultirende Moment Xb aus den Momenten der Einzelkräfte mittelst des Seil- und Kräftepolygons in folgender Weise zu finden:

Wir bilden zuerst das Kräftepolygon, Fig. 64_b, indem wir die in den Constructionsplan bereits übertragenen Kräfte 1, 2, 3, 4, 5

in beliebiger Reihenfolge aber in gleichem Richtungssinne mit ihren Endpunkten an einander setzen. Die Verbindungslinie der beiden Endpunkte der äussersten Kräfte giebt die Hauptresultante der Grösse und Richtung nach. Im Constructionsplan Fig. 64_a finden wir die Lage derselben, wenn wir im Kräfteplan den Pol O wählen, Strahlen von O nach den Endpunkten der einzelnen Kräfte ziehen und hiernach das Seilpolygon construiren. (Die Construction der Graphostatik setzen wir als bekannt voraus.) Durch den Schnittpunkt der verlängerten letzten Seiten des Seilpolygons geht die Hauptresultante aller Einzelresultanten 1, 2, 3, 4, 5, d. h. aller $(n - 1)$ Kräfte und ist ihre Lage somit eindeutig bestimmt. Es ist also das Moment derselben $Ta = \Sigma (Pv \cos \alpha)$ gefunden.

Aus der Gleichung $Xb = Ta$ ist nun $X = \frac{Ta}{b}$ zu berechnen, resp. geometrisch zu construiren.

B) Construction der Gleichgewichtslagen eines maschinellen Systems.

§. 78. Wenn sich ein maschinelles System in einem periodischen Bewegungszustande befindet, so existiren gewisse Lagen, in welchen sich die äusseren Kräfte im System das Gleichgewicht halten. Die Ermittelung dieser Gleichgewichtslagen auf analytischem Wege hat seine bedeutenden Schwierigkeiten, sobald das Gesetz der wirkenden Kräfte und die Bahnen, welche die Angriffspunkte derselben beschreiben, nicht ganz einfach sind. Auf graphischem Wege gelangt man dagegen, wie in der Folge gezeigt werden soll, leicht und sicher zum Ziel, und zwar kann die Construction der Gleichgewichtslagen nach zwei Methoden vorgenommen werden. Die eine Methode, welche auf der Construction der lebendigen Kraft basirt ist, werden wir in Kapitel VIII behandeln. Die andere Methode, welche die Construction von Geschwindigkeitscurven erheischt, soll uns im Folgenden beschäftigen und nennen wir dieselbe zweckmässig die Methode der Geschwindigkeitscurven.

Wir wollen das Wesen derselben statt an allgemeinen an einzelnen der Praxis entlehnten Beispielen klar legen.

§. 79. α) **Aufgabe.** An einem Punkte eines maschinellen Systems werde eine gegebene Kraft eingeleitet, an einem andern Punkte ausgeleitet und soll hier einen gegebenen Widerstand überwinden. Es sollen die Gleichgewichtslagen des Systems bestimmt werden.

Es ist in Fig. 71, Taf. VIII, ein maschinelles System gegeben. Im Punkte A, dem Kreuzkopf der Pleuelstange einer rotirenden Schubkurbel, greife die treibende Kraft P an und setze mittelst des Rades I das Rad II in halb so schnelle Umdrehung. Mit dem Rade II ist der Arm DE eines Antiparallelogrammes fest verbunden, dessen zweite Kurbel FG sich um den festen Punkt F dreht.

Dies maschinelle System besteht somit aus drei Mechanismen. Wir bezeichnen, wie früher bemerkt ist, die rotirende Schubkurbel, sammt dem kleineren Rade als den ersten Mechanismus, mit I, das grössere der beiden in einander eingreifenden Räder, als den zweiten Mechanismus, mit II und das Antiparallelogramm, als den dritten Mechanismus, mit III.

Was nun die Wirkung der äusseren Kräfte in dem gegebenen System anbelangt, so sei in G tangential an den Kurbelkreis um F der constante Widerstand Q zu überwinden. Aus der Forderung, dass nach einer vollen Umdrehung des grösseren Rades die Arbeit der treibenden Kraft gleich sei der Arbeit des Widerstandes, bestimmt sich die mittlere treibende Kraft. Nennen wir diese P, setzen $CB = r$, $FG = a$, so ist nach einer vollen Umdrehung des grösseren Rades die von P geleistete Arbeit $= P.8r$, die von Q geleistete Arbeit $= Q.2a\pi$. Aus der Gleichung $P.8r = Q.2a\pi$ ergiebt sich

$$\frac{P}{Q} = \frac{a\pi}{4r}.$$

In der Zeichnung ist $a = 3r$ gemacht, also folgt

$$\frac{P}{Q} = \frac{3\pi}{4} = 2{,}36.$$

Bezeichnen wir die Bahngeschwindigkeiten der Angriffspunkte von P und Q mit u und v, so ist, da die Richtungen der beiden Kräfte in die Bahngeschwindigkeiten fallen, Gleichgewicht vorhanden, wenn

$$Pu = Qv, \text{ also } \frac{P}{Q} = \frac{v}{u} = 2{,}36$$

ist.

Wir können nun, wie in §. 76, Kapitel VII, (siehe Fig. 63) gezeigt wurde, durch eine sehr einfache geometrische Construction für jede Lage des maschinellen Systems die Geschwindigkeiten v und u durch Strecken darstellen. Zu dem Ende wählen wir, da es nur auf das Verhältniss der Geschwindigkeiten ankommt, zweckmässig den Radius $CB = r$ als Einheit für die Geschwindigkeit w des Punktes B. Ziehen wir durch C eine Linie parallel der Schubstange AB, so schneidet diese auf dem Geschwindigkeitsradius des Punktes A eine Strecke AA_1 ab, welche durch ihre Grösse die Geschwindigkeit des Punktes A, gemessen in der angenommenen Einheit, darstellt. w ist auch die Geschwindigkeit des grösseren Rades und wird durch die Strecke $FF_1 = CB = w$ dargestellt.

Um die Geschwindigkeit des Punktes E zu finden, haben wir F_1E zu verbinden und zu dieser Linie durch F eine Parallele zu ziehen. Hierfür ist nämlich der Mittelpunkt D als festliegender Pol und die Gerade F_1E als zwangläufig bewegtes System zu betrachten. Diese Parallele schneidet in den Geschwindigkeitsradius ED bei E_1 ein und bestimmt die Strecke EE_1, welche die Geschwindigkeit des Punktes E darstellt.

Ziehen wir endlich durch E_1 zu EG der zwangläufig bewegten Linie des Antiparallelogrammes eine Parallele, so haben wir in der Strecke GG_1 die Geschwindigkeit v des Punktes G.

Wiederholen wir diese Construction für eine grössere Anzahl von Lagen des Systems, insbesondere der Kurbel FG, wobei wir die Geschwindigkeit im Kurbelkreis um C für alle Lagen constant $= r$ setzen und denken uns die für u und v erhaltenen Strecken als radiale Ordinaten vom Kurbelkreis des Radius FG aufgetragen, so würden wir in dem verbindenden Zug der Endpunkte

dieser Ordinaten zwei Curven erhalten. An denjenigen Stellen, wo das Verhältniss $\frac{v}{u} = 2{,}36$ ist, würde die Kurbel FG die Gleichgewichtslagen des Systems markiren.

Dies Verhältniss würde aber nur umständlich zu ermitteln sein. Es lohnt daher wohl der Mühe, das auseinandergesetzte Verfahren noch in folgender Weise zu vervollkommnen.

Wir wählen nämlich die Einheit, in der wir die Geschwindigkeit des Punktes G auftragen, $= \frac{P}{Q}$, also 2,36 mal kleiner, als die Einheit, in der wir die Geschwindigkeit des Punktes A messen. Dies erreichen wir, indem wir für die Geschwindigkeit $w_1 = EE_1$ eine Geschwindigkeit $w_1' = EE_1' = \frac{EE_1 \cdot Q}{P} = \frac{EE_1}{2{,}36}$ substituiren und durch E_1' einen Kreis um D beschreiben. Die radialen Abstände der durch E_1' und E gehenden Kreise geben in jeder Lage des Systems die modificirte Einheit, in der wir die Geschwindigkeit des Punktes G messen. Eine durch $E_1' \parallel$ zu EG gezogene Gerade bestimmt in der Strecke $G_1'G$ die modificirte Geschwindigkeit des Punktes G

$$v' = \frac{v \cdot Q}{P} = \frac{v}{2{,}36}.$$

In der Constructionszeichnung, Fig. 72, Taf. IX, sind für 16 Lagen die Strecken v' und u als radiale Ordinaten vom Kurbelkreis durch G nach innen aufgetragen und auf diese Weise zwei Curven verzeichnet, welche einander acht Mal schneiden. In den Schnittpunkten ist die Bedingung

$$u = v' = \frac{v \cdot Q}{P} = \frac{v}{2{,}36}$$

erfüllt, also auch die Bedingung

$$\frac{v}{u} = \frac{P}{Q} = 2{,}36.$$

Dies ist die Gleichung des Gleichgewichtes der äusseren Kräfte, somit markirt die Kurbel FG, wenn sie durch diese acht Schnittpunkte gelegt wird, die gesuchten Gleichgewichtslagen des Systems.

Ist das ganze System masselos, nur in G eine um F rotirende Masse concentrirt, so sind diese acht Schnittpunkte $O_1 \ldots . O_8$ auch diejenigen, welche die Kurbel FG unter dem Einflusse der gegebenen Kräfte mit aufeinanderfolgender Minimal- und Maximalgeschwindigkeit passirt.

In der durch die Kurbellage FO_3 bestimmten Gleichgewichtslage des Systems sind mit Zuhilfenahme der Pole $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ der einzelnen Mechanismen noch die bezüglichen Parallelogramme der äusseren Kräfte construirt:

In Bezug auf den Mechanismus I hält die Kraft P einer Tangentialkraft T (in der Peripherie des kleineren Rades) das Gleichgewicht. Diese Kraft geht unverändert auf die Peripherie des grösseren Rades über und ist mit einer im Kurbelkreis durch E wirkenden Tangentialkraft R ins Gleichgewicht gesetzt. (Durch Bildung des Parallelogrammes im Mechanismus II.) Endlich ist durch Construction des Parallelogrammes im Mechanismus III die Kraft R, welche wir, ebenso wie die Tangentialkraft T, nur als Hilfskraft zu betrachten haben, mit Q ins Gleichgewicht gesetzt, wobei die graphische Construction in der That in der bezüglichen Seite des Parallelogrammes die Kraft $Q = \frac{P}{2{,}36}$ giebt.

In der Zeichnung ist für P die Länge $23{,}6^{mm}$ gewählt, für Q die Länge 10^{mm} gefunden.

Wir können diese graphische Construction der Kräfte als Controle für die Richtigkeit unsers Verfahrens, betreffend die Ermittelung der Gleichgewichtslagen, betrachten.

§. 80. Wir behandeln im Folgenden noch eine complicirtere

β) **Aufgabe.** Es werde in einem Punkte des ersten Mechanismus eine bestimmte Kraft aufgenommen, die gleichzeitig an mehreren Stellen im maschinellen System gegebene Widerstände überwinden soll. Es sollen die Gleichgewichtslagen des Systems bestimmt werden.

Ein ebenfalls der Praxis entlehntes maschinelles System giebt die Zeichnung Fig. 73, Taf. IX. X Im Kreuzkopf A einer rotirenden Schubkurbel mit horizontaler Schubrichtung wirke die constante treibende Kraft P, im Kurbelkreis tangential in B der constante Widerstand Q. In demselben Punkte greift die Schub-

stange einer rotirenden Schubkurbel mit verticaler Schubrichtung an, die an ihrem Kreuzkopf einen constanten vertical wirkenden Widerstand (etwa die Last des durch eine Pumpe zu hebenden Wassers) zu überwinden hat.

Nach einer vollen Umdrehung soll die Summe aller Arbeiten gleich Null sein, also

$$P.4r = Q.2r\pi + R.4r$$

$$2P = Q\pi + 2R.$$

Ist Q und R gegeben, so ist hierdurch P bestimmt, also auch das Verhältniss

$$\frac{P}{R} = \delta \quad \frac{Q}{R} = \delta_1.$$

Zur Lösung unserer Aufgabe, die Gleichgewichtlagen des Systems zu finden, verfahren wir nun folgendermassen:

Nennen wir die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der drei Kräfte, u, v, w, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die Gleichung

$$Pu = Qv + Rw$$

erfüllt ist. Durch Division mit R folgt

$$\frac{P}{R}u = \frac{Q}{R}v + w$$

$$\delta u = \delta_1 v + w.$$

Auch hier setzen wir für die geometrische Construction die Geschwindigkeit v im Kurbelkreis constant gleich dem Radius und suchen die drei in der Gleichung enthaltenen Geschwindigkeiten graphisch in dieser resp. der modificirten Einheit auszudrücken.

1) Wir vergrössern v um δ, so dass die Strecke $B_1 D_1$ die modificirte Geschwindigkeit δv giebt. Die von den in jeder Lage um den Mittelpunkt D liegenden Punkten D_1 || der Schubstange $A_1 B_1$ gezogenen Parallelen bestimmen auf den Geschwindigkeitsradien der Punkte A_1 (Angriffspunkt der Kraft P) ein Diagramm, dessen Ordinaten gleich δu sind.

2) Machen wir auf der Verlängerung des Kurbelradius DB_1, vom Kurbelkreis aus $B_1 B_2 = \delta_1 v$, so giebt der durch B_2 um D beschriebene Kreis das Diagramm für die modificirten Geschwindigkeiten $\delta_1 v$.

3) Die durch den Mittelpunkt D $\|$ der Schubstange $B_1 C_1$ gezogene Gerade schneidet auf dem Geschwindigkeitsradius des Punktes C_1 die Strecke $C_1 C_2 = w$ ab. Diese Construction für alle Lagen wiederholt, giebt das Diagramm der Geschwindigkeiten w. Wir haben jetzt alle Elemente zusammen, um die polaren Geschwindigkeitscurven nach der aufgestellten Gleichung zu construiren.

Wir machen z. B. für die Lage 4 des Systems (die miteinander correspondirenden Geschwindigkeitsordinaten sind in der Constructionszeichnung mit denselben Ziffern bezeichnet) auf der Verlängerung der Kurbel $D_1 B_1$ die Strecke $B_2 F = w$. Dann ist $B_1 F = \delta_1 v + w$ und diese Strecke somit nach unserer Gleichung die radiale Ordinate der einen Geschwindigkeitscurve.

Die Strecken $\delta u = B_1 E$ radial aufgetragen, geben die andere Geschwindigkeitscurve, die in ihren Schnittpunkten mit der ersteren die Kurbellagen markirt, für welche das System im Gleichgewicht ist. Bei Annahme einer einzigen im Kurbelkreis rotirenden Masse passirt die Kurbel diese Lagen mit aufeinander folgenden Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten.

In der Constructionszeichnung sind die Werthe

$$P : Q : R = 39 : 10 : 25$$

gewählt, also:

$$\delta = \frac{39}{25}, \quad \delta_1 = \frac{10}{25}.$$

Bemerkung. Es können die beiden behandelten Aufgaben noch durch eine dritte vermehrt werden, in der man etwa die Bedingung stellt, dass an verschiedenen Stellen im System treibende Kräfte aufgenommen werden, die an verschiedenen Stellen Widerstände überwinden sollen. Der Weg zur Lösung dieser complicirteren Aufgabe ist durch die Lösung der einfacheren klar vorgezeichnet. Es kommt auch hier nur darauf an, die graphischen Strecken für die Geschwindigkeiten im richtigen Verhältniss zu modificiren, zusammenzusetzen und die bezüglichen Geschwindigkeiten am besten auf den Fahrstrahlen eines Kurbel-

kreises, mit dem man es meistens zu thun haben wird, aufzutragen.

Die Schnittpunkte dieser Curven geben dann auch hier ohne Weiteres die Gleichgewichtslagen des maschinellen Systems.

VIII. Kapitel.

Ueber die Wirkungen äusserer Kräfte, welche sich in Mechanismen nicht das Gleichgewicht halten.

1) Ueber die lebendige Kraft und graphische Darstellung derselben.

§. 81. In den meisten Problemen, welche die Praxis stellt, ist nach der Gleichgewichtsbedingung der äusseren Kräfte in einem Mechanismus direct nicht gefragt. Meistens halten sich die Kräfte nicht das Gleichgewicht, nur die Summe ihrer Arbeiten ist nach gewissen Zeitabschnitten gleich Null, wodurch ein periodischer Bewegungszustand des Mechanismus herbeigeführt wird. Dies findet besonders bei dem für die Praxis wichtigsten Mechanismus, dem Kurbelgetriebe, statt. Hier wie in allen Fällen, in welchen die Bewegung des Mechanismus eine in gleichen Zeiten periodisch wiederkehrende ist, bestimmt man sich aus der Natur der zu überwindenden Widerstände den mittleren Widerstand und aus der Arbeit desselben die mittlere treibende Kraft.

Geräth ein Mechanismus unter dem Einflusse äusserer Kräfte in einen periodischen Bewegungszustand, so wird die Bewegung seiner Punkte bald eine beschleunigte, bald eine verzögerte sein, je nachdem ein Ueberschuss der treibenden Kraft über den Widerstand resp. umgekehrt vorhanden ist. Dieser Ueberschuss lässt sich mit Hilfe des mitgetheilten Verfahrens, das Gleichgewicht äusserer Kräfte zu finden, rechnerisch wie graphisch leicht darstellen.

Zur Entwickelung der bezüglichen Methode gehen wir von dem d'Alembert'schen Princip aus. Dasselbe lehrt bekanntlich,

wie die Bewegungsänderungen in einem Mechanismus aus den Wirkungen der äusseren Kräfte zu finden sind. Die äusseren Kräfte werden hierbei in zwei Klassen getheilt, in bewahrte*) (sogenannte Effectivkräfte) und verlorene Kräfte, und diese folgendermassen definirt:

Die verlorenen Kräfte sind der aliquote Theil der äusseren Kräfte, welche durch die Verbindungen des Systems aufgenommen werden. Sie üben keinen Einfluss auf die Bewegung des Mechanismus aus. Die Differenz aus der Summe der gegebenen äusseren und der Summe der verlorenen Kräfte giebt die Summe der bewahrten Kräfte (Effectivkräfte). Diese allein versetzen den Mechanismus in einen gewissen Bewegungszustand.

Das d'Alembert'sche Princip lehrt, dass die verlorenen Kräfte einander das Gleichgewicht halten.

Da wir nun, wie die früheren Kapitel gezeigt haben, im Stande sind, allgemein das Gleichgewicht äusserer Kräfte in einem Mechanismus, wie in einem maschinellen System, zu finden, so haben wir auch die bewahrten Kräfte (Effectivkräfte), wenn wir von den gegebenen äusseren Kräften diejenigen Theile subtrahiren, die für sich im Gleichgewicht sind.

A) Graphische Darstellung der lebendigen Kraft in einem einfachen Mechanismus.

§. 82. **Aufgabe.** Es sollen sich im Mechanismus des allgemeinen Kurbelgetriebes die beiden Kräfte P und Q einander nicht das Gleichgewicht halten. Es soll die Grösse der bewahrten (Effectiv-)Kraft bestimmt werden. Fig. 65, Taf. VIII.

Wir finden den Theil P_1 von P, welcher als bewegende Kraft allein auf Beschleunigung der Massen wirkt, wenn wir von P denjenigen Theil P' bestimmen, der Q im Mechanismus das Gleichgewicht hält. Nach dem rechnerischen Verfahren haben

---

*) Die Bezeichnung „bewahrte Kräfte" ist nicht sehr üblich, jedoch für die vorliegenden Untersuchungen die beste, weil in der Folge die „bewahrten Kräfte" sog. Effectivkräfte stets als Rest einer Subtraction erscheinen.

wir nach §. 69 die Gleichung $(P - P_1)\,p = Q\,q$ anzusetzen. Daraus finden wir

$$P_1 = P - Q \cdot \frac{q}{p}.$$

Nach dem graphischen Verfahren haben wir, Fig. 65, die Richtungen von P und Q zum Schnitt zu bringen, den Schnittpunkt mit dem Pol zu verbinden und über dieser Verbindungslinie als Diagonale mit der Grösse Q ein Parallelogramm zu construiren. Die andere Seite ist dann $P - P_1 = P'$, also ist, da P bekannt, P_1 graphisch gefunden. Das Moment dieser bewahrten Kraft P_1 in Bezug auf den Pol versetzt nun die Massen des Mechanismus in eine gewisse Beschleunigung. Die hierbei aufzuwerfenden Fragen finden ihre Erledigung in einem besondern Abschnitt.

Was die Construction der Fläche der lebendigen Kraft anbelangt, die in einem System während der Bewegung desselben aufgesammelt resp. consumirt wird, so wollen wir das einzuschlagende Verfahren, statt allgemein, auch hier lieber an einfachen der Praxis entlehnten Beispielen erläutern, bei welchen sich gleichzeitig noch Manches ergeben wird, was für die praktische Durchführung des Verfahrens werthvoll erscheint. Wir wählen zunächst als einfachsten Mechanismus den

§. 83. 1) **Ellipsenlenker.** Im Warzenkreis der Kurbel AD, Fig. 66, Taf. VII, wirke tangential die constante Kraft P, in C der Richtung der Bahngeschwindigkeit der constante Widerstand Q. (Bei C ist Schlittenführung.) Wir nehmen an, dass nach einer vollen Umdrehung der Kurbel AD um A die Arbeit der treibenden Kraft P gleich ist der Arbeit des Widerstandes Q. Es sei $AD = r$. Dann ist das Verhältniss der mittleren Kräfte P und Q gegeben durch die Gleichung

$$P \cdot 2r\pi = Q \cdot 8r$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{4}{\pi} = 1{,}27.$$

Da in der gezeichneten Stellung des Mechanismus Q die grössere Kraft ist, so bestimmen wir von Q den Theil Q', welcher P das Gleichgewicht hält, und zwar durch Bildung des Kräfteparallelogrammes in N, dessen Diagonale durch den Pol geht.

Die construirte Seite des Parallelogrammes giebt die Grösse Q'. Der Rest $Q - Q' = Q_1$ giebt die Kraft, welche allein die Verzögerung der Bewegung bewirkt. Tragen wir nun Q_1 senkrecht zur Bahngeschwindigkeit des Punktes O auf und denken uns die Kurbel AD unendlich wenig aus ihrer gezeichneten Lage bewegt, so hat C den Weg ds zurückgelegt und das Product aus der Ordinate Q_1 in den Weg ds giebt graphisch in dem bei C gebildeten Rechteck den Ueberschuss der Arbeit von Q über die Arbeit von P, welche bei der unendlich kleinen Verschiebung, resp. während des unendlich kleinen Zeittheilchens dt geleistet wird.

Die Dynamik lehrt nun, dass der Ueberschuss der während eines unendlich kleinen Zeittheilchens geleisteten Arbeit der treibenden Kraft über die Arbeit des Widerstandes gleich ist dem Zuwachs an lebendiger Kraft. Derselbe ist also gleich dem bei G gebildeten Rechteck von der Höhe Q_1 und der Basis ds. Wiederholen wir die angegebene Construction für verschiedene Lagen des Mechanismus und verbinden die Endpunkte aller in den entsprechenden Angriffspunkten als Ordinaten errichteten bewahrten Kräfte, so erhalten wir zwei Curven, welche gewisse Flächen einschliessen:

a) Es schliesst die um den Kurbelmittelpunkt A in Bezug auf zwei Axen symmetrisch vertheilte Curve eine Fläche ein, welche aus lauter unendlich kleinen Rechtecken besteht, die analog demjenigen bei C gebildet sind. Jedes dieser Rechtecke ist gleich dem Zuwachs an lebendiger Kraft, welchen der Mechanismus bei unendlich geringer Verschiebung aus seiner Lage erhalten würde, wenn Q die treibende und P die widerstehende Kraft wäre. Da letzteres unserer Annahme gemäss gerade umgekehrt ist, so wird die durch das kleine Rechteck dargestellte lebendige Kraft consumirt. Dies gilt für jede Stellung des Mechanismus, in welcher der Angriffspunkt C von Q zwischen E und F liegt, mithin ist die ganze Fläche EAF ein Maass für die lebendige Kraft, welche während einer vollen Umdrehung der Kurbel AD consumirt wird.

b) Wenn der Angriffspunkt der Kraft P auf dem Kurbelkreis zwischen GH, resp. $G_1 H_1$ liegt, so überwiegt die treibende Kraft P. Ein Theil derselben P' hält Q das Gleichgewicht und

die Kraft $P - P' = P_1$ ist die bewahrte Kraft. Errichten wir dieselbe ebenfalls als Ordinate auf dem bezüglichen Wegtheilchen, wiederholen die Construction für verschiedene Lagen des Angriffspunktes von P auf dem Bogen GH und verbinden die Endpunkte aller Ordinaten, so entsteht eine Curve, deren Fahrstrahlen, gemessen von der Peripherie des Kurbelkreises um A multiplicirt mit dem zugehörigen Bogenelement des Kreises die lebendige Kraft giebt, welche in den Massen des Mechanismus aufgesammelt wird.

Rectificiren wir den Bogen GH und $G_1 H_1$ und tragen die Fahrstrahlen an den bezüglichen Stellen senkrecht auf, so erhalten wir auch hier eine Fläche, die ein Maass für die lebendige Kraft ist, welche, während die Kurbel den Bogen GH, resp. $G_1 H_1$ durchläuft, im Mechanismus aufgesammelt wird.

Da wir annahmen, dass nach einer vollen Umdrehung die Arbeit von P gleich ist der Arbeit von Q, so folgt, dass die ganze Fläche $[EAF]$ der consumirten lebendigen Kraft gleich ist der Fläche $[G'KH' + G_1'K_1'H_1']$ der gewonnenen lebendigen Kraft.

Hat der Mechanismus eine solche Lage, dass der Angriffspunkt

<table>
<tr><td></td><td>von Q in E resp. F</td><td rowspan="4">ist, so ist Gleichgewicht der äusseren Kräfte vorhanden.</td></tr>
<tr><td></td><td>„ P „ G „ G_1</td></tr>
<tr><td>oder auch</td><td>„ Q „ F „ E</td></tr>
<tr><td></td><td>„ P „ H_1 „ H</td></tr>
</table>

In dem Falle, dass die Stange BC, das zwangläufig bewegte System, in dem vorliegenden Getriebe vollkommen gewichtslos und nur eine einzige Masse im Kurbelkreis concentrirt ist, sind diese Gleichgewichtslagen auch die Lagen des Mechanismus, in welchen der Angriffspunkt D von P Maximal- resp. Minimalgeschwindigkeit besitzt. —

§. 84. Als zweites Beispiel wählen wir das Kurbelgetriebe, wobei unser aus allgemeinen Sätzen hergeleitetes Verfahren Constructionen liefern wird, die behufs Ermittelung der Schwungradmassen in der Praxis schon theilweise bekannt sind.

Die Untersuchungen über die Wirkungen der Kräfte an einem Kurbelmechanismus, soweit sie in das vorliegende Kapitel gehören, geben gerade zu wichtigen Folgerungen Veranlassung.

2) **Die rotirende Schubkurbel.** Fig. 67, Taf. VIII. Im Kreuzkopf C wirke die treibende Kraft P, im Kurbelkreis tangential der Widerstand Q.

Behufs praktischer Durchführung unserer Methode nehmen wir an, dass die rotirende Schubkurbel einer Expansionsmaschine angehört, welche mit $^1/_3$ Füllung arbeitet, ferner, dass der Dampfdruck P auf dem Wege der Expansion sich nach dem Mariotteschen Gesetze ändert.

Hinsichtlich der numerischen Werthe für den Dampfdruck und die Dimensionen des Kurbelgetriebes sind in der Zeichnung die Ordinaten im Dampfdruckdiagramm $DGFE$, 10^{mm} Ordinate $=$ 1 Atmosphäre und der absolute Druck im Dampfcylinder $= 4{,}2$ Atmosphären angenommen. Zieht man hiervon den Gegendruck $= 1{,}2$ Atmosphären ab, so bleiben 3 Atmosphären treibender Dampfdruck als gegebene äussere Kraft übrig (dargestellt durch die Ordinate $CC_1 = 30^{mm}$). Der totale Kolbenhub ist $= 700^{mm}$, das Verhältniss von Kurbelradius zu Schubstangenlänge $= \frac{1}{5}$ angenommen. Da die Zeichnung in $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse angefertigt ist, ist die Basis des Dampfdruckdiagrammes $= 70^{mm}$. Die Fläche desselben $DGFED_1$ dividirt durch die Basis giebt in der mittleren Ordinate $= 17^{mm}$ den mittleren treibenden Dampfdruck $= 1{,}7$ Atmosphären. Dieser verhält sich zum mittleren Widerstand Q wie $\pi : 2$, daher ist letzterer $= 1{,}08$ Atmosphären, dargestellt durch die polaren von einem concentrischen Kreise um A aufgetragenen Strecken [$HK = 10{,}8^{mm}$].

Wir stellen uns die

Aufgabe. Es soll graphisch der Ueberschuss der Arbeiten beider Kräfte P und Q für jede Lage der rotirenden Schubkurbel dargestellt werden.

Die horizontalen Ordinaten der Fläche $DGFE$ resp. $D_1G_1F_1E_1$ repräsentiren, wie schon erwähnt, die treibenden Kräfte. Die Flächen selbst geben die Arbeit der treibenden Kraft für den Niedergang resp. den Aufgang des Kreuzkopfes.

Behufs Construction der in der Zeichnung unter 45° schraffirten Flächen LMN und $L_1M_1N_1$, welche die lebendige Kraft

darstellen, die von der treibenden Kraft P auf dem Wege LN resp. $L_1 N_1$ angesammelt wird, verfahren wir principiell wie im vorigen Beispiel, indem wir von der treibenden Kraft P den Theil P' bestimmen, welcher der constanten Kraft Q das Gleichgewicht hält.

Der Pol $\mathfrak{P}$ ist als Schnittpunkt der durch den Kreuzkopf gezogenen Horizontalen mit der Verlängerung des Kurbelradius beim Kurbelgetriebe zeichnerisch sehr unbequem gelegen, da er für die Lagen der Kurbel in der Nähe der Horizontalen in die Unendlichkeit rückt. Nun haben aber die beiden äusseren Kräfte mit den Bahngeschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte gleiche Richtung. Wir können daher für die graphische Construction des Gleichgewichtes das auf S. 149 unter „Specialfall“ angeführte Verfahren benützen:

Wir tragen zu dem Ende $Q = HK$ im Angriffspunkte der Kraft P senkrecht zu deren Richtung auf, $Q = CT$, und ziehen durch den Endpunkt T eine Parallele zur Schubstange BC. Dieselbe schneidet auf der Verlängerung des Kurbelradius die Strecke $BU = P'$ ab. Machen wir nun von C_1 auf der Strecke CC_1 (Ordinate im Dampfdruckdiagramm) den Abschnitt $C_1 C_2 = P'$ $= BU$, so ist die Ordinate $CC_2 = P - P' = P_1$
der bewahrte auf Beschleunigung der Massen wirkende Theil der treibenden Kraft P.

Wiederholen wir diese Construction für alle Lagen der Kurbel, so erhalten wir in jedem Punkte C der Strecke LN eine Ordinate.

Die Verbindung aller Endpunkte derselben giebt eine in der Zeichnung mit —·—·—·— verzeichnete Curve LMN. Die von ihr eingeschlossene Fläche ist ein Maass für die lebendige Kraft, welche auf dem Wege OJ_1 der Kurbelwarze in den bewegten Massen der Schubkurbel aufgesammelt wird. Wenn der Mittelpunkt des Kreuzkopfes in N liegt, befindet sich die Kurbelwarze in J_1. Da im Punkte N die einer unendlich kleinen Verschiebung des Systems entsprechende Fläche der lebendigen Kraft gleich Null ist, so bildet
AJ_1N eine Gleichgewichtslage des Kurbelgetriebes.

Bei einer weiteren Drehung der Kurbel im angedeuteten

Sinne gewinnt der Widerstand Q das Uebergewicht über die treibende Kraft P. Um das graphische Bild für die von jetzt an consumirte lebendige Kraft zu erhalten, suchen wir von Q den Theil Q', welcher der Kraft P das Gleichgewicht hält. Die graphische Construction ist die analoge. Der radiale Abstand BB_1 ist $= Q$. Wir haben also nur $B_1 B_2 = Q'$ aufzutragen, um in BB_2 die Kraft $Q - Q' = Q_1$ zu erhalten, d. h.
den bewahrten auf Verzögerung der Massen wirkenden Theil des Widerstandes Q.

Diese Construction für alle Lagen der Kurbelwarze auf dem Bogen $J_1 O_1$ wiederholt, liefert eine Curve, deren Fahrstrahlen, gemessen vom Kreise um A, für jede Lage der Kurbel den Ueberschuss der widerstehenden Kraft über die treibende Kraft geben. Denken wir uns endlich den Bogen $J_1 O_1$ rectificirt und tragen die Fahrstrahlen an den betreffenden Fusspunkten als rechtwinkelige Ordinaten auf, so erhalten wir eine Curve, die in der Zeichnung punktirt ist, und deren Flächen-Inhalt ein Maass für die lebendige Kraft giebt, welche auf dem Wege $J_1 O_1$ vom Widerstande Q consumirt wird.

Die andere Hälfte der Kurbelbewegung ist der eben discutirten ganz analog. Auf dem Wege von O_1 nach J resp. des Kreuzkopfes von L_1 nach N_1 dominirt wieder die treibende Kraft P und die Fläche $L_1 M_1 N_1$ stellt die lebendige Kraft dar, welche auf dem Wege $L_1 N_1$ des Kreuzkopfes, resp. auf dem Wege $O_1 J$ der Kurbelwarze in den bewegten Massen des Kurbelmechanismus aufgesammelt wird.

Die Flächen der gewonnenen und consumirten lebendigen Kräfte erschienen bisher getrennt. Wir können sie aber auch durch eine einzige polare Curve darstellen, welche den Kurbelkreis vier Mal schneidet. Wir erhalten dieselbe, wenn wir für die Bogen OJ_1 und $O_1 J$ die Tangentialkräfte im Kurbelkreis construiren, welche den beschleunigenden Kräften P_1 in jeder Lage das Gleichgewicht halten. Trägt man diese tangentialen Kräfte radial nach innen vom Kurbelkreis auf, so giebt die Verbindungslinie der Endpunkte dieser polaren Ordinaten zwei Curven, welche die bereits construirten aussenliegenden zu einer einzigen vervollständigen.

Diese eine continuirliche in sich geschlossene Curve, welche durch ihre Lage ausserhalb oder innerhalb des Kurbelkreises anzeigt, ob lebendige Kraft angesammelt, resp. consumirt wird, ist für die späteren Untersuchungen von Wichtigkeit.

Die Kurbellagen AO; AJ_1; AO_1; AJ; bei denen die Curve den Kurbelkreis vier Mal schneidet, bestimmen die Gleichgewichtslagen des Kurbelmechanismus. Gleichzeitig hat der Endpunkt der Kurbel, wenn wir uns in ihm eine Masse concentrirt denken, von der Masse des Kreuzkopfes und der Schubstange absehen, in diesen Lagen aufeinanderfolgende Minimal- und Maximalgeschwindigkeiten.

Als drittes Beispiel wählen wir

§. 85. 3) **die zweifache Schubkurbel.** Fig. 68, Taf. VIII.

Wir nehmen an, dass bei zwei einfachen Schubkurbeln, welche von denselben Dimensionen sind und von denselben Kräften angegriffen werden, wie die eben behandelte einfache, die Kurbeln unter einem Winkel von 90° auf einer gemeinschaftlichen Achse befestigt sind.

Aufgabe. Es soll der Ueberschuss der Arbeit der treibenden Kraft resp. des Widerstandes graphisch dargestellt werden.

Die vorher für die einfache Kurbel construirte polare Curve, welche den Kurbelkreis vier Mal schneidet, giebt ein Bild für die Wechselwirkung der treibenden Kraft und des Widerstandes, und jede radiale vom Kurbelkreis an gemessene Ordinate giebt, wie wir gezeigt haben, um 90° gedreht, ein Maass für die Kraft, welche die in der Kurbelwarze concentrirt gedachte Masse beschleunigt, resp. verzögert.

Es sei diese polare Curve für die Kurbel I, siehe die Zeichnung Fig. 68, construirt. Würden auf die Kurbel II und auf den zugehörigen Kreuzkopf die Kräfte nach einem andern Gesetze wirken, als in der Kurbel I, so würden wir nach dem auseinandergesetzten Verfahren für die Schubkurbel II eine zweite polare Curve construiren können, die ebenfalls vier Mal den Kurbelkreis schneidet, und deren radiale Ordinaten ebenfalls ein Maass für die im Kurbelkreis II beschleunigenden, resp. verzögernden Kräfte geben. Unserer Annahme gemäss ist nun aber die Schubkurbel I

identisch mit der Schubkurbel II, sowohl was die geometrischen Verhältnisse, als die Kraftwirkungen anbelangt, mithin sind auch die beiden polaren Curven dieselben, und wir bedürfen zur Erkennung der Kraftwirkungen nur einer einzigen Curve. Dieselbe ist in der Zeichnung gestrichelt (— — — — — —).

Auf der Kurbel II erstreckt sich die radiale Ordinate $B_2 C_2$ nach innen, deutet also auf eine Beschleunigung der im Kurbelkreis rotirend gedachten Masse. Auf der Kurbel I erstreckt sich die radiale Ordinate $B_1 C_1$ nach aussen, deutet also auf eine Verzögerung der rotirenden Masse. Beide Kräfte wirken tangential im Kurbelkreis. Wir erhalten also die resultirende Kraft, wenn wir beide algebraisch addiren. Nehmen wir daher die Strecke $B_2 C_2$ in den Zirkel und stecken dieselbe auf der Kurbel I von C_1 nach innen ab, so finden wir einen dritten Punkt D und die Differenzordinate $B_1 D$ deutet, weil sie sich nach innen erstreckt, an, dass die rotirende Masse beschleunigt wird. Diese Construction für alle Punkte des Kurbelkreises wiederholt (die algebraisch zu addirenden Ordinaten bezeichnet man zweckmässig mit gleichen Ziffern, wie dies in der Zeichnung geschehen) liefert eine resultirende Curve, welche den Kurbelkreis acht Mal schneidet (in der Zeichnung —·—·—·—).

Diese Schnittpunkte geben, wenn wir die Kurbel I durch sie hindurchlegen, d. h. diejenige Kurbel, in deren Richtung die Ordinaten der resultirenden Curve aufgetragen sind, acht Gleichgewichtslagen des doppelten Kurbelgetriebes. Für den Fall, dass nur eine einzige im Kurbelkreis concentrirt gedachte Masse zu bewegen ist, sind diese Gleichgewichtslagen auch hier gleichzeitig diejenigen, in denen die Kurbelwarze abwechselnd eine Maximal- resp. Minimalgeschwindigkeit besitzt.

Die Flächen, welche man erhält, wenn man den Kurbelkreis rectificirt und die polaren Ordinaten senkrecht zu den bezüglichen Wegtheilchen errichtet, geben in ihrem Inhalt ein Maass für die aufgesammelte, resp. consumirte lebendige Kraft. Die algebraische Summe sämmtlicher Flächen muss, da wir einen periodischen Bewegungszustand vorausgesetzt haben, gleich Null sein. Dies ist übrigens eine Controle für die Genauigkeit der graphischen Construction.

Als viertes Beispiel wählen wir

§. 86. 4) **Das oscillirende dreifache Kurbelgetriebe.** In der Zeichnung, Fig. 69, Taf. IX ist die Construction durchgeführt. Die Schubkurbeln seien geometrisch gleich und sollen nach dem nämlichen Gesetz von Kräften beansprucht werden. Die auf einer gemeinschaftlichen Achse befestigten Kurbeln sind um 120° gegen einander geneigt. Der Einfachheit halber ist hier Volldruck in der Richtung der Schubstange angenommen (dargestellt durch ein sectorartiges Diagramm im gemeinschaftlichen Drehpunkte der Schubstangen) und ein constanter Widerstand im Kurbelkreis.

Die Arbeit des Volldruckes P ist auch hier gleich der Arbeit des constanten Widerstandes Q; in Folge dessen ist die Bewegung jeder Kurbel eine in gleichen Zeiträumen wiederkehrend periodische. Ein graphisches Bild über die Wechselwirkung beider Kräfte giebt eine polare Curve von birnförmiger Gestalt und einer zur Verticalen symmetrischen Lage.

Die Fahrstrahlen derselben sind ein Maass für die beschleunigenden resp. verzögernden Kräfte, welche tangential in dem Endpunkte einer jeden Kurbel wirken. Die eingeschriebenen Grössen P, P_1, P', Q deuten die geometrische Construction der Fahrstrahlen an.

Addiren wir nun für irgend eine Lage des Kurbelgetriebes (auch hier sind die von den drei Kurbeln gleichzeitig bestrichenen Punkte des Kurbelkreises mit gleichen Ziffern bezeichnet) z. B. in der Lage 1 algebraisch die radialen Ordinaten 1_{I} 1_{II} 1_{III}, welche um je 120° auseinanderliegen, so erhalten wir die Ordinate der resultirenden Curve, deren vom Kurbelkreis ab gemessene Fahrstrahlen auf eine Beschleunigung resp. Verzögerung der bewegten Massen deuten. Für die Lage 1 des Kurbelgetriebes erstreckt sich die radiale Ordinate der resultirenden Curve nach innen, folglich findet bei unendlich kleiner Verschiebung des Systems eine Ansammlung von lebendiger Kraft statt. Diese resultirende Curve liegt in Bezug auf drei unter 120° gegen einander geneigte Axen symmetrisch um den Kurbelmittelpunkt A vertheilt, wobei sie sechs Mal den Kurbelkreis schneidet.

Diese Schnittpunkte markiren sechs Gleichgewichtslagen des Systems.

Setzen wir voraus, dass nur eine einzige im Kurbelkreis concentrirt gedachte Masse in Bewegung zu setzen ist, so sind diese Lagen gleichzeitig diejenigen, in denen die Kurbelwarze abwechselnd eine Maximal, resp. Minimalgeschwindigkeit besitzt.

B) Graphische Darstellung der lebendigen Kraft in einem maschinellen System.

§. 87. Die in einem maschinellen System (System einfacher Mechanismen, deren Bewegung von einander abhängig ist) wirkenden äusseren Kräfte sollen einander nicht das Gleichgewicht halten. Dann haben wir auch hier, wie in den einfacheren Fällen unter A) zunächst sämmtliche Kräfte ins Gleichgewicht zu setzen.

Nehmen wir an, dass von n gegebenen äusseren Kräften (in Fig. 64, Taf. VII, wählten wir $n = 6$) nur ein bestimmter Theil X' von X (X haben wir jetzt als gegebene Kraft zu betrachten) den übrigen $(n - 1)$ Kräften das Gleichgewicht hält — und wie wir den Werth X' ermitteln, ist in §. 77, S. 160 eingehend erläutert worden —, so erhalten wir in dem Differenzwerth $X - X' = X_1$ den bewahrten Theil der äusseren Kräfte, der je nachdem er positiv oder negativ ist, eine Ansammlung resp. Verzehrung von lebendiger Kraft veranlasst.

Es hat kein Interesse, die Methode hinsichtlich der graphischen Darstellung der lebendigen Kraft in einem maschinellen System in ihrer ganzen Allgemeinheit weiter zu verfolgen; wir begnügen uns auch hier an einem einfachen der Praxis entlehnten Beispiel, die Fruchtbarkeit und Handlichkeit der Methode nachzuweisen.

§. 88. **Beispiel.** Es seien, Fig. 70, Taf. IX zwei einfache rotirende Schubkurbeln gegeben, deren Schubrichtungen senkrecht auf einander stehen und deren Schubstangen von einer gemeinschaftlichen Kurbel bewegt werden.

In den Kreuzköpfen C und D wirke eine constante treibende Kraft P, bez. ein constanter Widerstand R.

Da die von denselben zurückgelegten Wege gleich sind, folgt $P = R$. Das Verhältniss von Kurbel- zu Schubstangenlänge ist bei der horizontalen Schubkurbel $= \frac{1}{5}$, bei der verticalen Schubkurbel $= \frac{1}{4}$ angenommen.

Behufs Construction der polaren Curve, deren Fahrstrahlen multiplicirt mit dem zugehörigen Element des Kurbelkreises die Fläche der aufgesammelten resp. consumirten lebendigen Kraft giebt, gehen wir zweckmässig auf folgendem Wege vor, wobei aber zu erwähnen ist, dass derselbe keineswegs in allen Fällen sich als der zweckmässigste erweisen wird. Die bezüglichen Curven können an verschiedenen Stellen im maschinellen System auf mannigfache Art construirt werden. Wie und wo sie am leichtesten und zur Beantwortung der bezüglichen Fragen passend zu verzeichnen sind, bleibt der Einsicht des Construirenden vorbehalten.

Im vorliegenden Falle halten wir folgende Verzeichnungsmethode für die zweckmässigste:

Wir ersetzen die treibende Kraft P durch eine Kraft Q', welche, tangential am Kurbelkreis im Endpunkte der Kurbel wirkend, hinsichtlich der Bewegung des maschinellen Systems denselben Effect hat, wie P. Diese Kraft Q' finden wir, wenn wir nach dem in §. 70, S. 149 hergeleiteten Satze radial im Endpunkte der Kurbel $BG = P$ auftragen und durch G eine Parallele zur Schubstange ziehen. Dieselbe schneidet auf der im Kreuzkopf C errichteten verticalen Ordinate die Strecke $CC_{,,} = Q'$ ab. Diese Construction von Q' für alle Lagen der Kurbel wiederholt, liefert eine in der Zeichnung in Punkten und Linien gestrichelte Curve, deren Fahrstrahlen, vom Kurbelkreis aus gemessen, die die treibenden Kräfte P ersetzenden Tangentialkräfte Q' darstellen.

Ebenso können wir für jede Lage der verticalen Schubkurbel durch die Parallele $GD_{,,}$ die Strecke $DD_{,,} = Q''$ construiren. Q'' ist die Tangentialkraft, welche den Widerstand R ersetzt. Da letzterer der Bewegung des Systems durch die treibende Kraft P entgegenwirkt, so hat auch Q'' die entgegen-

gesetzte Richtung von Q' und dies berücksichtigen wir dadurch, dass wir die Strecken $DD_{\prime\prime} = Q''$ vom Kurbelkreis um A radial nach innen auftragen. Die Verbindung der Endpunkte dieser nach den Radien des Kurbelkreises transponirten Strecken Q'' giebt eine zweite polare Curve. Die algebraische Addition der Fahrstrahlen Q' und Q'' beider Curven liefert nun die gesuchte resultirende Curve, deren Fahrstrahlen vom Kurbelkreis aus, die aufgesammelte resp. consumirte lebendige Kraft darstellen. Da wo dieselben ausserhalb des Kurbelkreises liegen, hat die Kraft P, da wo sie innerhalb liegen, die Kraft R das Uebergewicht. Die Schnittpunkte der resultirenden, in der Zeichnung stark ausgezogenen Curve mit dem Kurbelkreis, bestimmen die Gleichgewichtslagen des Systems.

Im Allgemeinen ist es, wie dies schon in Kapitel VII unter B) gezeigt wurde, zur Lösung der Aufgabe: „die Gleichgewichtslagen eines maschinellen Systems zu bestimmen", nicht ausschliesslich nothwendig, sich der Methode der graphischen Darstellung der lebendigen Kräfte zu bedienen. In complicirteren Fällen, als den unter A) und B) behandelten, erfordert doch die exacte Durchführung dieser Methode grosse Aufmerksamkeit. Dann empfiehlt es sich, vorausgesetzt, dass man eben nur die Bestimmung der Gleichgewichtslagen des Systems im Auge hat, die in dem citirten Kapitel begründete Methode der Geschwindigkeitscurven anzuwenden.

2) Ueber die im Kurbelkreis eines maschinellen Systems auftretenden Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten.

§. 89. An die beiden Methoden, welche wir in diesem und im vorigen Kapitel erläutert und auf verschiedene Beispiele angewandt haben, und von denen die letztere uns gleichzeitig in den Stand gesetzt hat, die Gleichgewichtslagen eines maschinellen Systems zu bestimmen, lässt sich noch eine wichtige Folgerung knüpfen, mit deren Begründung sich die nachfolgende Untersuchung befassen soll.

Bei den vorhin gestellten Aufgaben, in denen wir die Gleich-

gewichtslagen des maschinellen Systems gleichzeitig als diejenigen Lagen bezeichneten, für welche im Kurbelkreis aufeinanderfolgende Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten auftreten, mussten wir hinsichtlich der Massenvertheilung jedes Mal die Annahme machen, dass das ganze System gewichtslos sei, bis auf eine Masse, welche, mit der Kurbel fest verbunden, um den Kurbelmittelpunkt rotirt.

Ist noch eine andere Masse im System vorhanden, die nicht um einen festen Punkt rotirt, so können wir von den Minimal- und Maximalgeschwindigkeiten im Kurbelkreis nicht sagen, dass diese auch in den Gleichgewichtslagen des Systems auftreten, also auch umgekehrt, wenn wir diese bestimmt haben, behaupten, dass nun auch die Punkte im Kurbelkreis bestimmt seien, in denen die Kurbelwarze eine Minimal- resp. Maximalgeschwindigkeit habe. Das darf nicht sein. Um daher diese bezügliche Frage zu beantworten, müssten wir uns die ganz allgemeine Aufgabe stellen, den Ort der Minimal- resp. Maximalgeschwindigkeit im Kurbelkreis zu bestimmen, wenn die Massen beliebig im Mechanismus vertheilt sind.

Vorläufig wollen wir die Lösung dieser sehr schwierigen Aufgabe noch auf sich beruhen lassen und von jeder andern Masse, mit Ausschluss einer einzigen rotirenden, Abstand nehmen. Man war bisher gewöhnt, dieses bei Dampfmaschinen zu thun, und in all den Fällen, in denen die hin- und hergehenden Massen im Kreuzkopf klein und die rotirenden Massen im Schwungrad sehr gross sind, kann die Vernachlässigung der Massen im Kreuzkopf mit Recht gebilligt werden. In vielen Fällen, z. B. bei schnellgehenden Dampfmaschinen, darf man aber, wie Radinger in seiner höchst lesenswerthen Broschüre: „Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit“ (siehe auch „Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure“, Heft 1, Jahrg. 1871) nachgewiesen hat, von den hin- und hergehenden Massen nicht Abstand nehmen. Wo dies aber thunlich ist und es sich um die Herstellung einer möglichst gleichförmigen Geschwindigkeit im Kurbelkreis durch Anbringung von Schwungrädern handelt, ist es nothwendig, von der grösseren Anzahl Kurbellagen, in denen eine Minimal- resp. Maximalgeschwindigkeit auftritt, diejenigen

beiden zu bestimmen, in denen diese Werthe unter sich ein Minimum oder Maximum erreichen.

Diese Aufgabe soll im Folgenden gelöst werden.

§. 90. Es sei V die grösste Maximalgeschwindigkeit, V_0 die kleinste Minimalgeschwindigkeit und T die algebraische Summe der Arbeiten, welche von den äusseren Kräften verrichtet werden, während die Kurbelwarze den zwischen V und V_0 liegenden Bogen zurücklegt, ferner sei M die auf den Kurbelkreis reducirte Masse des Schwungrades. Dann besteht bekanntlich die Beziehung:

$$\frac{M}{2}(V^2 - V_0^2) = T.$$

Sind die Punkte des Kurbelkreises bestimmt, in denen die Werthe V und V_0 auftreten, so ist auch T bekannt und aus vorstehender Gleichung kann die Masse M resp. das Gewicht des Schwungrades berechnet werden.

Wir bezeichnen nun, indem wir von irgend einer Minimalgeschwindigkeit ausgehen, dieselbe mit V_0^{I}, die folgende Maximalgeschwindigkeit mit V^{I}, die folgende Minimalgeschwindigkeit mit V_0^{II}, die nächste Maximalgeschwindigkeit mit V^{II}, und bilden so weiter V_0^{III}, V^{III}, V_0^{IV}, V^{IV} ....

Während die Kurbelwarze den zwischen den Werthen V_0^{I} und V^{I} liegenden Bogen zurücklegt, werde von den äusseren Kräften die Arbeit A verrichtet. Dann haben wir die Beziehung:

$$\frac{M}{2}(V^{I^2} - V_0^{I^2}) = A.$$

Während die Kurbelwarze den Bogen V^{I} bis V_0^{II} zurücklegt, werde die Arbeit B consumirt. B sei ein absoluter Werth. Dann folgt

$$\frac{M}{2}(V^{I^2} - V_0^{II^2}) = B,$$

durch Subtraction beider Gleichungen ergiebt sich

$$1)\ \frac{M}{2}(V_0^{II^2} - V_0^{I^2}) = A - B.$$

Sind nun C, D, E, ... die in den folgenden Abschnitten geleisteten Arbeiten (sämmtliche Werthe sind absolut zu nehmen), so folgt analog:

$$2)\ \frac{M}{2}\left(V_0^{III^2} - V_0^{II^2}\right) = C - D,$$

$$3)\ \frac{M}{2}\left(V_0^{IV^2} - V_0^{III^2}\right) = E - F,$$

$$4)\ \frac{M}{2}\left(V_0^{V^2} - V_0^{IV^2}\right) = G - H,$$

. . . . u. s. w.

Dividiren wir Gleichung 1) durch 2) so erhalten wir

$$\frac{V_0^{II^2} - V_0^{I^2}}{V_0^{III^2} - V_0^{II^2}} = \frac{A - B}{C - D}$$

oder

$$\frac{(V_0^{II} + V_0^{I})(V_0^{II} - V_0^{I})}{(V_0^{III} + V_0^{II})(V_0^{III} - V_0^{II})} = \frac{A - B}{C - D}.$$

Diese Gleichung ist nun einer wesentlichen Vereinfachung fähig, wenn wir Folgendes beachten:

Wenn die Schwankungen der aufeinanderfolgenden Geschwindigkeiten im Kurbelkreis nur gering sind, was in der That bei allen Maschinen eintritt, deren Gang durch ein Schwungrad regulirt wird, so gilt dies noch in viel höherem Grade von den aufeinanderfolgenden Minimalgeschwindigkeiten. Die Summe je zweier solcher Grössen wird also nahezu constant sein.

Es erscheint daher als vollkommen gerechtfertigt

$$\frac{V_0^{II} + V_0^{I}}{V_0^{III} + V_0^{II}} = 1 \text{ zu setzen,}$$

wonach unsere Gleichung in

$$\frac{V_0^{II} - V_0^{I}}{V_0^{III} - V_0^{II}} = \frac{A - B}{C - D}$$

übergeht, oder auch, wenn k eine Constante bedeutet, in

$$\begin{aligned} V_0^{I} - V_0^{II} &= -k(A - B),\\ V_0^{II} - V_0^{III} &= -k(C - D),\\ V_0^{III} - V_0^{IV} &= -k(E - F),\\ V_0^{IV} - V_0^{V} &= -k(G - H), \end{aligned}$$

. . . . u. s. w.

Betrachten wir $-k$ als Constante, so lässt sich die in diesen Gleichungen enthaltene Beziehung durch folgenden Satz aussprechen:

Satz. Die Differenz der absoluten Werthe der auf einander folgenden Minimalgeschwindigkeiten ist proportional der zwischen den bezüglichen Gleichgewichtslagen von den äusseren Kräften verrichteten Arbeit.

Die durch die Gleichgewichtslagen des Systems gegebenen Stellungen der Kurbel theilen den Kurbelkreis in Sectoren (Fig. 74, Taf. X). Wir schreiben in jeden Winkelraum den Werth der Arbeit, welche die äusseren Kräfte verrichten, indem die Kurbelwarze den zugehörigen Bogen durchläuft, und bezeichnen die gewonnene Arbeit durch ein positives, die consumirte durch ein negatives Zeichen.

Indem wir die Werthe cyclisch aufeinander folgen lassen, können wir durch eine laufende Ungleichung den kleinsten Werth aller Minimalgeschwindigkeiten ermitteln. Das Verfahren möge an einem Beispiel mit numerischen Werthen erläutert werden.

Beispiel. Die Gleichgewichtslagen irgend eines Systems mögen durch die in Fig. 74 gezeichneten Stellungen der Kurbel im Kurbelkreis gegeben sein.

Von der Arbeit der äusseren Kräfte ist für jede der zehn Bogenabschnitte der algebraische Werth in den zugehörigen Sectorenwinkel eingeschrieben. Wir beginnen mit irgend einer bebeliebigen Minimalgeschwindigkeit V_0^{I} und bilden nach obigem Satze (die Constante $-k$ kann $= -1$ gesetzt werden):

$V_0^{I} - V_0^{II} = -(9 - 6) = -3$ also $V_0^{I} < V_0^{II}$
$V_0^{II} - V_0^{III} = -(12 - 5) = -7$ „ $V_0^{II} < V_0^{III}$
$V_0^{III} - V_0^{IV} = -(7 - 12) = +5$ „ $V_0^{III} > V_0^{IV}$
$V_0^{IV} - V_0^{V} = -(2 - 8) = +6$ „ $V_0^{IV} > V_0^{V}$
$V_0^{V} - V_0^{VI} = -(3 - 5) = +2$ „ $V_0^{V} > V_0^{VI}$
$V_0^{VI} - V_0^{I} = -(11 - 8) = -3$ „ $V_0^{VI} < V_0^{I}$

Diese sechs Ungleichungen lassen sich zu einer laufenden Ungleichung zusammenfassen:

$$V_0^{VI} < V_0^{I} < V_0^{II} < V_0^{III} > V_0^{IV} > V_0^{V} > \underline{\underline{V_0^{VI}}},$$

der kleinste Werth ist augenscheinlich V_0^{VI}, somit

$V_0^{VI} = V_0$ die kleinste Minimalgeschwindigkeit.

§. 91. Zur Bestimmung der grössten Maximalgeschwindigkeit existiren zwischen den Arbeiten der äusseren Kräfte und den auf-

einander folgenden Maximalgeschwindigkeiten ganz analoge Beziehungen, die wir erhalten, wenn wir von der Gleichung

$$\frac{M}{2}(V^{I^2} - V_0^{II^2}) = B$$

die Gleichung

$$\frac{M}{2}(V^{II^2} - V_0^{II^2}) = C$$

subtrahiren, nämlich

$$\frac{M}{2}(V^{I^2} - V^{II^2}) = B - C.$$

Ebenso erhalten wir

$$\frac{M}{2}(V^{II^2} - V^{III^2}) = D - E.$$

u. s. w.

Die Division der beiden Gleichungen ergiebt:

$$\frac{V^{I^2} - V^{II^2}}{V^{II^2} - V^{III^2}} = \frac{B - C}{D - E} = \frac{V^I + V^{II})\,(V^I - V^{II})}{(V^{II} + V^{III}\,(V^{II} - V^{III})}.$$

Auch hier erscheint es aus demselben, vorhin angeführten Grunde gerechtfertigt

$$\frac{V^I + V^{II}}{V^{II} + V^{III}} = 1 \text{ zu setzen.}$$

Darnach bilden wir, wenn wir mit k_1 eine Constante bezeichnen

$$\left.\begin{array}{l} V^I - V^{II} = k_1(B - C) \\ V^{II} - V^{III} = k_1(D - E) \\ V^{III} - V^{IV} = k_1(F - G) \\ \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \text{u. s. w.}$$

Diese Beziehung lässt sich in einen analogen Satz zusammenfassen.

Satz. Die Differenz der absoluten Werthe je zweier auf einander folgenden Maximalgeschwindigkeiten ist proportional der zwischen den bezüglichen Gleichgewichtslagen von den äusseren Kräften verrichteten Arbeit.

Für unser Beispiel ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} V^{II} - V^I = 12 - 6 = +\ 6 & \text{also} & V^{II} > V^I \\ V^I - V^{VI} = 9 - 8 = +\ 1 & \text{„} & V^I > V^{VI} \\ V^{VI} - V^V = 11 - 5 = +\ 6 & \text{„} & V^{VI} > V^V \end{array}$$

$$V^{V} - V^{IV} = 3 - 8 = -5 \text{ also } V^{V} < V^{IV}$$
$$V^{IV} - V^{III} = 2 - 12 = -10 \;\;„\;\; V^{IV} < V^{III}$$
$$V^{III} - V^{II} = 7 - 5 = +2 \;\;„\;\; V^{III} > V^{II}.$$

Diese sechs Ungleichungen geben die laufende Ungleichung

$$V^{III} > V^{II} > V^{I} > V^{VI} > V^{V} < V^{IV} < \underline{\underline{V^{III}}}.$$

Offenbar ist V^{III} der grösste Werth, also $V^{III} = V$ die grösste Maximalgeschwindigkeit.

In der Fig. 74, Taf. X sind die diesen Werthen entsprechenden Stellungen der Kurbel stark ausgezogen.

Hiernach ergiebt sich nun die rechte Seite der allgemeinen Gleichung

$$\frac{M}{2}(V^2 - V_0^2) = \frac{M}{2}(V^{III^2} - V_0^{VI^2}) = T,$$

wenn wir diejenige Arbeit T der äusseren Kräfte bestimmen, die, während die Kurbelwarze den Bogen V^{III} bis V_0^{VI} zurücklegt, im System verrichtet wird.

Da es nur auf den absoluten Werth derselben ankommt, so ist es gleichgültig, in welchem Sinne wir von V^{III} auf dem Kurbelkreis herumgehen.

Gehen wir rechts herum, so erhalten wir

$$T = +7 - 5 + 12 - 6 + 9 - 8 + 11 = +20.$$

Links herum folgt

$$T = -12 + 2 - 8 + 3 - 5 = -20.$$

Die Werthe der einzelnen in die Sectoren hineinzuschreibenden Arbeiten ermittelt man am zweckmässigsten entweder durch Quadratur der Flächen der lebendigen Kräfte (wenn man die bezügliche Methode wählt) oder durch besondere Berechnung der Arbeiten der einzelnen im System wirkenden Kräfte. Letzteres ist nothwendig, wenn man die Methode der Geschwindigkeitscurven zur Bestimmung der Gleichgewichtslagen gewählt hat. Uebrigens lässt sich aus der Uebereinstimmung des positiven und negativen Werthes von T auf die Genauigkeit der graphischen Construction schliessen. Ebenso controlirt man auch hierdurch die wahre Ermittelung der Kurbellagen, denen die Werthe V und V_0 entsprechen.

Bei der Anwendung dieser Methode auf ein praktisches Beispiel, in welchem das System (Balancier-Zwillingsdampfmaschine)

6 Gleichgewichtslagen hatte und für diese 6 Perioden die Arbeiten der äusseren Kräfte durch Quadratur der bezüglichen Flächen (Indicatordiagramme) ermittelt wurden, erhielt ich für T die Werthe

$$T = + 12{,}46,$$
$$T = - 12{,}17;$$

der Fehler, der bei der stattgehabten Construction gemacht wurde, betrug demnach 2,3 Proc. Dabei war die ganze Construction nur in $\frac{1}{30}$ natürlicher Grösse, also in einem verhältnissmässig kleinen Maassstabe ausgeführt. —

§. 92. Was die Ermittelung der ausgezeichneten Werthe V und V_0 betrifft, so kann unter Umständen der Fall eintreten, dass die aus den aufgestellten Gleichungen für die Differenzen der Geschwindigkeiten gefolgerte Ungleichung ohne Weiteres nicht erkennen lässt, welches der Maximal- resp. der Minimalwerth ist. Dies tritt jedes Mal ein, wenn die mit gleichen Vorzeichen behafteten Differenzwerthe in dem System der aufgestellten Gleichungen nicht continuirlich auf einander folgen.

Ein zweites Beispiel soll die Art und Weise, in welcher eine Veränderung der einzelnen Gleichungen vorzunehmen ist, um eine passende Ungleichung zu erhalten, feststellen.

Fig. 75, Taf. X stellt die Gleichgewichtslagen eines Systems im Kurbelkreis dar und die Sectorenwinkel enthalten die bezüglichen Arbeitswerthe.

Zur Ermittelung des ausgezeichneten Werthes V bilden wir in bekannter Weise die Gleichungen:

1) $V^{I} - V^{II} = 9 - 6 = +3$ also $V^{I} > V^{II}$
2) $V^{II} - V^{III} = 8 - 14 = -6$ „ $V^{II} < V^{III}$
3) $V^{III} - V^{IV} = 5 - 7 = -2$ „ $V^{III} < V^{IV}$
4) $V^{IV} - V^{V} = 11 - 5 = +6$ „ $V^{IV} > V^{V}$
5) $V^{V} - V^{I} = 5 - 6 = -1$ „ $V^{V} < V^{I}$

Die Reihe der negativen Differenzwerthe -6, -2, -1, ist hier durch einen positiven Differenzwerth $+6$ unterbrochen.

Die aus diesem System gebildete Ungleichung

$$V^{I} > V^{II} < V^{III} < V^{IV} > V^{V} < V^{I}$$

lässt nicht erkennen, welcher Werth der grösste ist.

Wir müssen in diesem und in ähnlichen Fällen die Gleichungen des Systems, welche diese Schwierigkeit bereiten, umformen.

Zu dem Ende addiren wir Gleichung 4) und 5) und erhalten die Gleichung

$$4^{*})\ V^{IV} - V^{I} = +5,$$

ferner addiren wir Gleichung 5) und 1) und erhalten

$$5^{*})\ V^{V} - V^{II} = +2,$$

dann können wir das Gleichungssystem bilden:

$$\begin{array}{ll} 5^{*}) & V^{V} - V^{II} = +2 \\ 2) & V^{II} - V^{III} = -6 \\ 3) & V^{III} - V^{IV} = -2 \\ 4) & V^{IV} - V^{V} = +6 \end{array}$$

und erhalten die Ungleichung

$$V^{V} > V^{II} < V^{III} < \underline{\underline{V^{IV}}} > V^{V}.$$

Offenbar ist V^{IV} hier der grösste Werth. Um noch festzustellen, ob auch $V^{IV} > V^{I}$ ist, welche Beziehung wir nicht in unserer Ungleichung haben, benutzen wir Gleichung 4*) $V^{IV} - V^{I} = 5$, d. h. es ist $V^{IV} > V^{I}$. Hiernach ist in der That

V^{IV} die grösste Maximalgeschwindigkeit V.

Zur Bestimmung der kleinsten Minimalgeschwindigkeit haben wir die Gleichungen

$$\begin{array}{l} V_0^{I} - V_0^{V} = -(9 - 6) = -3 \\ V_0^{V} - V_0^{IV} = -(5 - 5) = -0 \\ V_0^{IV} - V_0^{III} = -(11 - 7) = -4 \\ V_0^{III} - V_0^{II} = -(5 - 14) = +9 \\ V_0^{II} - V_0^{I} = -(8 - 6) = -2. \end{array}$$

Dieses System von Gleichungen liefert die Ungleichung

$$V_0^{III} > \underline{\underline{V_0^{II}}} < V_0^{I} < V_0^{V} < V_0^{IV} < V_0^{III},$$

die hier ohne Weiteres, da ein Zeichenwechsel innerhalb der Reihe nicht statt hat, erkennen lässt, dass V_0^{II} der kleinste Werth ist, also ist $V_0^{II} = V_0$ die kleinste Minimalgeschwindigkeit.

Beim Ansatz der Gleichungen ist stets darauf zu achten, dass man von dem beliebig gewählten Werthe der Minimal- oder Maxi-

malgeschwindigkeit in dem Sinne herumgeht, dass man zunächst den anliegenden positiven Sector bestreicht.

3) Ueber die Bewegung beliebig vertheilter Massen in einem einfachen Mechanismus.

Erste Herleitung der allgemeinen Gleichung.

§. 93. Wir haben bei den Untersuchungen im vorigen Abschnitte die Voraussetzung gemacht, dass im System nur eine rotirende Masse vorhanden sei. Wir wollen im Folgenden uns Rechenschaft zu geben suchen, nach welchem Gesetz die Bewegung eines einfachen Mechanismus, in welchem die Massen beliebig vertheilt sind, vor sich geht.

Nennen wir Fig. 76, Taf. VIII m irgend ein Massentheilchen, v dessen Bahngeschwindigkeit, P die dieselbe beschleunigende resp. verzögernde Kraft, α den Winkel zwischen den Richtungen von v und P, ds das unendlich kleine Wegtheilchen von m, so haben wir bekanntlich, wie die Dynamik lehrt, die Beziehung

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = P\cos\alpha\, ds,$$

oder

$$mv\,dv = P\cos\alpha\, ds.$$

Links haben wir den Zuwachs an lebendiger Kraft, rechts die Elementararbeit der das Massentheilchen angreifenden Kraft. Diese Beziehung über das ganze System ausgedehnt, giebt

$$\Sigma(mv\,dv) = \Sigma(P\cos\alpha\, ds).$$

Bezeichnen wir mit r den Geschwindigkeitsradius des Theilchens m, mit ε den Winkel, welchen die mit der Geschwindigkeit U des fortrückenden Pols gleichgerichtete Tangente an die Polbahn*) mit dem Geschwindigkeitsradius bildet und ziehen wir durch den Pol $\mathfrak{P}$ die Normale zur Polbahn, so folgt

---

*) Die Polbahn ist der Ort aller derjenigen Punkte, welche, während das System die ihm vorgeschriebene Bewegung vollführt, nach einander Pole der augenblicklichen Bewegung werden. Die Polbahn kann, sobald die Zwangläufigkeit des bewegten Systems gegeben ist, a priori verzeichnet werden.

I. **Für alle Punkte des Systems links von der Normalen zur Polbahn** (die Normale sei nahezu vertical gerichtet, welche Annahme nur die Bezeichnung „links und rechts“ rechtfertigt, sonst aber von keiner principiellen Bedeutung ist), folgt:

$$m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 + \ldots$$
$$= P_1 \cos\alpha_1 ds_1 + P_2 \cos\alpha ds_2 + \ldots\ldots.,$$

durch das Zeitelement dt die ganze Gleichung dividirt giebt

$$m_1 v_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 v_2 \frac{dv_2}{dt} + \ldots$$
$$= P_1 \cos\alpha_1 \frac{ds_1}{dt} + P_2 \cos\alpha_2 \frac{ds_2}{dt} + \ldots\ldots$$

Beachten wir, dass

$$\frac{ds_1}{dt} = v_1 = r_1 \Omega$$
$$\frac{ds_2}{dt} = v_2 = r_2 \Omega \text{ u. s. w.}$$

ist (Ω = Winkelgeschwindigkeit um den Pol), und dass sowohl r wie Ω sich mit der Zeit ändert, so folgt

$$\frac{dv_1}{dt} = r_1 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \frac{dr_1}{dt}$$
$$\frac{dv_2}{dt} = r_2 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \frac{dr_2}{dt} \text{ u. s. w.,}$$

dies eingeführt, giebt die Gleichung:

$$m_1 r_1 \Omega \left(\frac{r_1 d\Omega}{dt} + \frac{\Omega dr_1}{dt}\right) + m_2 r_2 \Omega \left(\frac{r_2 d\Omega}{dt} + \frac{\Omega dr_2}{dt}\right) + \ldots\ldots$$
$$= P_1 \cos\alpha_1 r_1 \Omega + P_2 \cos\alpha_2 r_2 \Omega + \ldots\ldots$$

oder

$$\Omega \frac{d\Omega}{dt} \Sigma(mr^2) + \Omega^2 \Sigma \left(mr \frac{dr}{dt}\right) = \Omega \Sigma(P\cos\alpha . r).$$

Sei nun dS das Bogenelement der Polbahn, so ist

$$dr_1 = - dS\cos\varepsilon_1$$
$$dr_2 = - dS\cos\varepsilon_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Betrachtet man den Pol als einen freien die Polbahn durchlaufenden Punkt (streng genommen ist der Pol in jedem Augenblick ein anderer Systempunkt), so ist auch dadurch erklärt, was man unter der **Geschwindigkeit** des Pols zu verstehen hat.

Da für die Punkte links von der Normalen zur Polbahn ε ein stumpfer Winkel, also der Cosinus negativ ist, das Differential des Geschwindigkeitsradius aber, weil derselbe bei der in Fig. 76 angedeuteten Lagenänderung des Systems zunimmt, positiv sein muss, so haben wir dS mit dem negativen Vorzeichen zu versehen, was eben in der Gleichung geschehen ist.

Führen wir diese Werthe in unsere Gleichung ein, so folgt

$$1)\quad \frac{d\Omega}{dt}\,\Sigma(mr^2) - \Omega\,\frac{dS}{dt}\,\Sigma(mr\cos\varepsilon) = \Sigma(P\cos\alpha\,.\,r).$$

II. Für alle Punkte rechts von der Normalen zur Polbahn folgt (die bezüglichen Grössen versehen wir mit einem Strich oben)

$$dr' = -\,dS\cos\varepsilon'.$$

Hier ist jeder Winkel ε' ein spitzer, also der Cosinus positiv. Der Geschwindigkeitsradius nimmt ab, daher ist sein Differential negativ einzuführen. Es folgt somit

$$2)\quad \frac{d\Omega}{dt}\,\Sigma(mr'^2) - \Omega\,\frac{dS}{dt}\,\Sigma(mr'\cos\varepsilon') = \Sigma(P'\cos\alpha'\,.\,r').$$

Beide Gleichungen 1) und 2) addirt und

$$\Sigma(mr^2) + \Sigma(mr'^2) = J,$$
$$\Sigma(mr\cos\varepsilon) + \Sigma(mr'\cos\varepsilon') = S = Mx,$$
$$\Sigma(P\cos\alpha\,.\,r) + \Sigma(P\cos'\alpha'\,.\,r') = Tr,$$
$$\frac{dS}{dt} = U$$

gesetzt, giebt

$$J\,\frac{d\Omega}{dt} - \Omega\,US = Tr.$$

In dieser Gleichung, welche das Bewegungsgesetz eines zwangläufig bewegten Systems mit beliebig vertheilten Massen darstellt, bedeutet:

Ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems um den Pol,

J das polare Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf den Pol,

U die Geschwindigkeit des Pols auf der Polbahn,

S das statische Moment des Systems in Bezug auf die Normale zur Polbahn,

x den Abstand derselben vom Massenmittelpunkt,
M die in letzterem vereinigt gedachte Masse des Systems,
Tr das Moment der Resultante aller Kräfte in Bezug auf den Pol.

Hinsichtlich des statischen Momentes S ist zu bemerken, dass in der Beziehung

$$\Sigma(m\,r\cos\varepsilon) + \Sigma(m\,r'\cos\varepsilon') = S$$

das erste Glied, weil ε ein stumpfer Winkel ist, negativ ist. Es kann also auch der Werth von S positiv oder negativ ausfallen, je nachdem

$$\Sigma(m\,r\cos\varepsilon) \lessgtr \Sigma(m\,r'\cos\varepsilon') \text{ ist.}$$

Hierüber entscheidet am besten die Lage des Massenmittelpunktes in Bezug auf die Normale zur Polbahn.

Wir setzen an ersteren einen Pfeil, welcher senkrecht auf der Normalen zur Polbahn steht und von dieser abgekehrt ist. Dreht dieser Pfeil in demselben Sinne als das resultirende Kraftmoment, welches übrigens auch die Richtung der Geschwindigkeit U bestimmt, so ist der Werth S positiv, im entgegengesetzten Falle negativ.

Wird also für S der absolute Werth eingesetzt, so gilt für den durch die Fig. 77_a, Taf. X gekennzeichneten Fall A) die Gleichung

$$J\frac{d\Omega}{dt} - \Omega US = Tr,$$

für den durch Fig. 77_b gegebenen Fall B)

$$J.\frac{d\Omega}{dt} \pm \Omega US = Tr.$$

Unter der gedachten Voraussetzung in Bezug auf S haben wir somit allgemein

$$3)\; J.\frac{d\Omega}{dt} \pm \Omega US = Tr.$$

Das zweite Glied erhält eine modificirte Form, wenn wir die für den Durchmesser des Wendekreises bekannte Relation $D = \frac{U}{\Omega}$ einführen

$$4)\; J.\frac{d\Omega}{dt} \pm \Omega^2 DS = Tr.$$

Zweite Herleitung der allgemeinen Gleichung

$$J \frac{d\Omega}{dt} \pm \Omega U S = Tr.$$

§. 94. In der Einleitung zu meiner im Civilingenieur (Jahrgang 1872) erschienenen Abhandlung „die Beschleunigungen in Pleuelstangen u. s. w.“ nahm ich bereits Gelegenheit einen Satz herzuleiten, nach welchem die tangentiale Beschleunigung $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$ irgend eines Massentheilchens eines zwangläufig bewegten Systems proportional der Differenz des Geschwindigkeitsradius und der Sehne des Tangentialkreises ist. Mit dem Namen „Tangentialkreis“ habe ich dort den zweiten von Bresse entdeckten Kreis bezeichnet. Derselbe ist bekanntlich der Ort aller derjenigen Punkte des Systems, welche in einem bestimmten Augenblick der Bewegung keine Tangentialbeschleunigung besitzen. Sein Mittelpunkt liegt auf der Tangente zur Polbahn (daher die Bezeichnung „Tangentialkreis“) und ist sein Durchmesser $= \frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}}$.

Die Gleichung, auf welcher der vorhin angeführte Satz beruht, lautet (siehe meine citirte Abhandlung, resp. die dort citirte Quelle):

$$(r - k_1) \frac{d\Omega}{dt} = \varphi_t = \frac{dv}{dt}.$$

In derselben bezeichnet r den Geschwindigkeitsradius eines beliebig gewählten Systempunktes und k_1 die durch denselben hindurchgehende Sehne des Tangentialkreises. Fig. 78, Taf. X.

Es sei nun P die das Massentheilchen m des Systems in der Richtung seiner Bahn beschleunigende Kraft.

Die Drehung des Systems um den Pol sei rechts herum, dann haben wir die Beziehung:

$$m \frac{dv}{dt} = P,$$

oder mit r beiderseits multiplicirt,

$$mr \frac{dv}{dt} = Pr.$$

Obigen Werth für $\frac{dv}{dt}$ eingeführt, giebt:

$$mr(r - k_1) \frac{d\Omega}{dt} = Pr$$

und diese Beziehung über alle Massentheilchen des Systems ausgedehnt:

$$\frac{d\Omega}{dt} [\Sigma(mr^2) - \Sigma(mrk_1)] = Tr.$$

$\Sigma(mr^2) = J$ ist das Trägheitsmoment des ganzen Massensystems, Tr das Moment der Resultirenden der äusseren Kräfte, beide in Bezug auf den Pol.

Was das zweite Summenglied anbelangt, so haben wir, wenn wir den Winkel, welchen die Sehne k_1 mit dem Durchmesser des Tangentialkreises bildet, α nennen, die Gleichung

$$k_1 = \frac{\Omega U}{\frac{d\Omega}{dt}} . \cos\alpha,$$

folglich ist

$$\frac{d\Omega}{dt} \Sigma(mrk_1) = \Omega U \Sigma(mr\cos\alpha).$$

$\Sigma(\mathrm{m}r\cos\alpha)$ ist aber das statische Moment aller Massen in Bezug auf die Normale zur Polbahn, welches wir mit S bezeichnet haben, mithin folgt:

$$\frac{d\Omega}{dt} \Sigma(mrk_1) = \Omega US,$$

daher

$$J \frac{d\Omega}{dt} - \Omega US = Tr.$$

Das negative Vorzeichen des zweiten Gliedes rührt von der Annahme her, dass das System rechts von der Normalen zur Polbahn liegt. Dem entsprechend dreht auch der von der Normalen abgekehrte im Massenmittelpunkte angetragene Pfeil in gleichem Sinne, wie das resultirende Moment. Läge das System so, dass der Mittelpunkt auf der linken Seite der Normalen sich befände, so hätten wir in der Gleichung

$$(r - k_1)\,\frac{d\Omega}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

den Werth k_1 negativ einzuführen und kämen dann zu unserer Gleichung mit dem + Vorzeichen.

§. 95. Bevor wir die allgemeine Gleichung einer weiteren Discussion unterwerfen, ist es interessant nachzuweisen, wie aus ihr der Specialfall hervorgeht, den wir unseren früheren Untersuchungen (Abschnitt 2) dieses Kapitels) zu Grunde legten.

Ist nämlich, Fig. 79, Taf. X, T die bewahrte Kraft (Effectivkraft), welche auf Beschleunigung der im Kurbelkreis concentrirt gedachten Masse M wirkt, und v deren Geschwindigkeit, so ist, wenn keine anderen Massen im System vorhanden sind, für den Bewegungszustand der rotirenden Masse die Gleichung $T = M\,\frac{dv}{dt}$ massgebend.

Behufs Herleitung derselben aus der obigen allgemeinen Gleichung nennen wir r den Geschwindigkeitsradius des Angriffspunktes von T, ω die Winkelgeschwindigkeit im Kurbelkreis, R den Kurbelradius, und Ω die Winkelgeschwindigkeit um den Pol, dann ist $R\omega = r\Omega$.

Daher $\Omega = R\,.\,\frac{\omega}{r}$; R ist constant, ω und r variabel, mithin folgt durch Differentiation

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{R}{r^2}\left(\frac{r\,d\omega}{dt} - \frac{\omega\,dr}{dt}\right)$$

oder da $\frac{dr}{dt} = -\,U\cos\varepsilon$ ist (s. S. 191), folgt

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{R}{r^2}\left(\frac{r\,d\omega}{dt} + U\omega\cos\varepsilon\right).$$

Führen wir diesen Werth in die allgemeine Gleichung 3) ein, S. 193, (dieselbe ist mit dem negativen Vorzeichen zu nehmen, weil der in M angetragene charakteristische Pfeil in Bezug auf den Pol im entgegengesetzten Sinne dreht, als die Kraft T) und setzen wir $S = Mr\cos\varepsilon$ (absoluter Werth), $\Omega = R\,.\,\frac{\omega}{r}$, endlich $J = Mr^2$, so folgt

$$Tr = Mr^2 \frac{R}{r^2} \left(\frac{r\,d\omega}{dt} + U\omega \cos \varepsilon\right) - UR \frac{\omega}{r} Mr \cos \varepsilon.$$

$$Tr = MRr \frac{d\omega}{dt},$$

$$T = MR \frac{d\omega}{dt} = M \frac{dv}{dt}.$$

Dies ist unsere Specialgleichung.

Specialisirung.

§. 96. Die allgemeine Gleichung

$$\frac{J \,.\, d\Omega}{dt} \pm \Omega US = Tr$$

gestaltet sich wesentlich einfacher, wenn wir einige Voraussetzungen machen, die oft bei praktischen Problemen zutreffen.

Das zweite Glied ΩUS wird $= 0$, d. h. es ist

$$Tr = J \,.\, \frac{d\Omega}{dt},$$

1) Wenn das Massensystem unter dem Einfluss bewegender Kräfte sich eben in Bewegung setzen will. Im ersten Moment der Bewegung ist dann Ω unendlich klein, während $\frac{d\Omega}{dt}$ eine messbare Grösse ist.

Ein Beispiel für diesen Fall bietet die Untersuchung über das Beharrungsvermögen der Massen im Regulator (Kapitel VIII) meiner im „Civilingenieur“ 1872 erschienenen Abhandlung betitelt: „die Mechanik der Centrifugalregulatoren und deren pseudoastatische Aufhängung“. Es ist dort $Tr = M$ gesetzt und hinsichtlich der Gleichung $M = J \frac{d\Omega}{dt}$ nur in Worten angedeutet, weshalb sie in dem gedachten Falle verwandt werden kann.

2) Wenn $S = 0$ ist, d. h.: Wenn in jeder Lage, die das System einnehmen kann, die Normale zur Polbahn durch den Massenmittelpunkt geht. Dies ist der Fall, wenn ein Kreis an einer beliebig gestalteten Curve rollt und der geometrische Mittelpunkt gleichzeitig der Massenmittelpunkt ist.

Auch wenn die Polbahn und der rollende Kreis (Polcurve*) nicht mechanisch ausgeführt sind, sondern nur als rollende Curven dem Mechanismus zu Grunde liegen, gilt diese einfache Beziehung. —

3) Wenn $U = 0$ ist, d. h. wenn der Pol eine feste Lage in der Ebene hat. In diesem Falle haben wir es mit einem System zu thun, das sich um einen festen Punkt dreht.

Was nun das allgemeine complicirtere Bewegungsgesetz eines Mechanismus mit beliebig gestalteten Polbahnen betrifft, so lohnt es nicht, dasselbe weiter zu discutiren, weil die Verhältnisse zu complicirt sind.

Wir begnügen uns, an die einfachere, also nur unter den genannten Voraussetzungen 1) 2) und 3) giltige Beziehung

$$Tr = J\frac{d\Omega}{dt}$$

einige interessante Folgerungen zu knüpfen.

§. 97. **Aufgabe.** Gegeben sei ein zwangläufig bewegtes System (Mechanismus), auf welches die Voraussetzung ad 2) anwendbar ist. Z. B. ein gleichmässig mit Masse belegter Kreis, der unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte längs einer beliebig gestalteten Curve rollt.

Es soll die Bewegung des Massenmittelpunktes bestimmt werden. Siehe Fig. 80, Taf. VIII.

Wir denken uns tangential an die Bahn des Massenmittelpunktes in letzterem eine Kraft X von solcher Grösse wirkend, dass der Mittelpunkt, wenn in ihm sämmtliche Masse concentrirt wäre, unter ihrem Einfluss in dieselbe Beschleunigung versetzt würde, die er als Systempunkt durch die äusseren Kräfte erhält.

Sei v die Bahngeschwindigkeit des Massenmittelpunktes und

---

*) Ich schliesse mich hier der Bezeichnungsweise Aronhold's an, der mit „Polcurve" diejenige Curve des beweglichen Systems bezeichnet, welche stets ihr volles Bogenelement an die Polbahn abgiebt. Das Rollen der beweglichen Polcurve auf der festen Polbahn ersetzt die zwangläufig vorgeschriebene Bewegung des Systems.

s sein Abstand vom Pol, Ω die Winkelgeschwindigkeit um den Pol, so folgt:

$$Mvdv = M.s\Omega.sd\Omega.$$

Das bei einer unendlich kleinen Bewegung vom Massenmittelpunkt zurückgelegte Wegtheilchen sei $\delta\sigma$, so ist die von der fingirten Kraft X geleistete Arbeit $Xd\sigma$, daher muss

$$Xd\sigma = Mvdv = Ms^2\Omega d\Omega$$

sein. Beiderseits durch dt dividirt und $\frac{d\sigma}{dt} = v = s\Omega$ gesetzt, giebt

$$Xs = Ms^2\frac{d\Omega}{dt}.$$

Sei Tr das Moment der Resultante aller äusseren Kräfte in Bezug auf den Pol, so ist für den vorliegenden Fall

$$Tr = J\frac{d\Omega}{dt},$$

somit haben wir durch Division beider Gleichungen

$$\frac{Xs}{Tr} = \frac{Ms^2}{J}.$$

Es folgt somit der

Satz. Das Moment der fingirten Kraft X verhält sich zum Moment der Resultante der äusseren Kräfte, wie das Trägheitsmoment der im Massenmittelpunkt vereinigt gedachten Masse zu dem Trägheitsmoment des ganzen Systems. (Sämmtliche Momente in Bezug auf den Pol als Drehpunkt.)

Nennen wir k den Trägheitsradius des Systems in Bezug auf den Massenmittelpunkt, so ist

$$J = M(k^2 + s^2),$$

daher

$$\frac{Tr}{Xs} = \frac{k^2 + s^2}{s^2} = \frac{k^2}{s^2} + 1.$$

Für jede Lage, die das System annehmen kann, ist k und im vorliegenden Falle auch s eine constante Grösse. Dann ist also Xs nur eine Function des Momentes der Resultante.

Die hergeleitete Relation setzt uns nunmehr in den Stand, nach den im I. Theil dieses Werkes abgehandelten Methoden die

Bewegung des Massenmittelpunktes in all ihren Elementen graphisch festzulegen. Je nach der Wirkungsweise der äusseren Kräfte und der Gestalt der Polbahn, auf welcher der Kreis resp. das gedachte System mit seiner Polcurve abrollt, wird es sich empfehlen, die Bewegung des Massenmittelpunktes als diejenige eines schweren Punktes auf vorgeschriebener Bahn zu behandeln, wobei wir auf den Anhang zum I. Theil verweisen, oder die Bahn zu rectificiren und die Bewegung des Massenmittelpunktes als eine geradlinige nach den im I. Kapitel gegebenen Methoden zu untersuchen.

Anhang zum dritten Theil.

IX. Kapitel.

Ueber die in einem Mechanismus und seinen Verbindungstheilen in Folge von Massenbewegung auftretenden inneren Kräfte.

1) Construction der Centrifugalkräfte und ihrer Resultante in Mechanismen.

§. 98. Während der zwangläufig vor sich gehenden Bewegung irgend eines in sich unveränderlichen Systems von Massen ist jedes Massentheilchen m gezwungen, nach einem bestimmten Geschwindigkeitsgesetz eine gewisse Bahn zu durchlaufen.

In irgend einem Augenblick der Bewegung sei ϱ, Fig. 81, Taf. IX, der Krümmungsradius dieser Bahn, dessen Richtung bekanntlich durch den Pol geht, und v die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Massentheilchen m auf seiner Bahn bewegt.

Je nachdem die Geschwindigkeit v sich ändert, wird die Beschleunigung f des Massentheilchens im Allgemeinen irgend eine gegen die Bahngeschwindigkeit geneigte Richtung haben.

Ist v als Function der Zeit t gegeben, so ist die Grösse der Beschleunigung bekanntlich durch die Gleichung

$$f = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2}}$$

gegeben.

Multipliciren wir diese Gleichung mit m, so erhalten wir in mf die Kraft, welche die Beschleunigung f in dem Massentheilchen m hervorruft. Dieselbe lässt sich in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine in die Richtung der Bahngeschwindigkeit, die andere in die Richtung der Normalen zur Bahn des Massentheilchens fällt.

Die tangentiale Componente hat allein das Bestreben, die Geschwindigkeit v in ihrer eigenen Richtung zu variiren, und bestimmt das Gesetz, nach welchem die Bewegung vor sich geht. Die normale Componente wirkt nicht weiter auf Bewegung, sondern ruft einen Druck hervor, welcher entweder direct von der Bahn in der Richtung der Normalen aufgenommen wird, wenn das Massentheilchen m sich in einem zwangläufig bewegten Punkte des Mechanismus befindet, oder durch die Cohäsion des Systems compensirt wird.

Wie dem auch sei, in jedem Falle muss die Resultante sämmtlicher Centrifugalkräfte, welche in den einzelnen Massentheilchen ihren Sitz haben, von den Verbindungstheilen des Mechanismus, mögen es nun Kurbeln oder feste Bahnen sein, aufgenommen werden.

A) Graphisches Maass der Centrifugalkraft eines Massentheilchens.

§. 99. Was nun zunächst die graphische Bestimmung der Centrifugalkraft $\frac{mv^2}{\varrho}$ eines einzelnen Massentheilchens betrifft, so verweise ich auf einen Satz, den ich in der Einleitung zu meiner schon vorhin citirten Abhandlung „Ueber die Beschleunigungen in Pleuelstangen" (Civilingenieur 1872) aus allgemeinen bereits bekannten Gleichungen der kinematischen Geometrie hergeleitet habe.

Derselbe lautet:

Satz. Die Centrifugalkraft irgend eines Massentheilchens in einem gleichmässig mit Masse belegten System ist proportional der Differenz des Geschwindigkeitsradius und der Sehne des Wendekreises.

Dieser Satz lässt sich auf folgende elementare Art beweisen:

In einem zwangläufig bewegten System hat für jeden Augenblick der Bewegung der Wendekreis*) eine ganz bestimmte Grösse und Lage, ebenso ist die Gestalt und Lage der Polbahn und Polcurve, deren Abrollen auf ersterer die Zwangläufigkeit des Systems ersetzt, genau bestimmt. Wir setzen die bezüglichen Constructionen als bekannt voraus.

Verbinden wir irgend ein Massentheilchen m mit dem Pol, so liegt auf diesem Strahl der Krümmungsmittelpunkt m_1 der Bahn, welche m beschreibt.

Es können nun zwei Fälle eintreten: entweder liegen die beiden Punkte m und m_1 auf verschiedenen Seiten, oder auf derselben Seite des Pols.

Wir setzen die Strecken

$$m\mathfrak{P} = r \text{ (Geschwindigkeitsradius)}$$

$$m_1\mathfrak{P} = r_1,$$

die Sehne des Wendekreises $\mathfrak{P}w = k$.

a) Für den ersten Fall, Fig. 81, Taf. IX, besteht bekanntlich die Beziehung:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{k} \text{ (Satz von Savary).}$$

Nun ist die Strecke

$$\overline{mm_1} = \varrho = r + r_1 \text{ also } r_1 = \varrho - r$$

daher

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho - r} = \frac{1}{k}$$

*) Der Wendekreis ist bekanntlich der Ort aller derjenigen Punkte des Systems, welche in einem bestimmten Augenblick der Bewegung keine Normalbeschleunigung haben. Hinsichtlich der Construction desselben verweise ich auf Aronhold's im Vorwort citirte Abhandlung, Schell's „Theorie der Bewegung und Kräfte“ und andere Autoren. Der Wendekreis geht durch den Pol und liegt sein Mittelpunkt auf der Normalen zur Polbahn.

$$\frac{r^2}{\varrho} = r - k.$$

b) Für den andern Fall, Fig. 82, Taf. IX, dass der Krümmungsmittelpunkt m_1 zwischen $\mathfrak{P}$ und m liegt, haben wir die analoge Beziehung:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{k}.$$

Da hier $m m_1 = \varrho = r_1 - r$ ist, folgt

$$r_1 = \varrho + r$$

somit

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho + r} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{r^2}{\varrho} = -(r - k).$$

In beiden Fällen haben wir bis auf das Vorzeichen für $\frac{r^2}{\varrho}$ denselben Werth erhalten.

Die Centrifugalkraft irgend eines Massentheilchens ist

$$c = \frac{m v^2}{\varrho} = \frac{m r^2 \Omega^2}{\varrho}$$

oder den Werth für $\frac{r^2}{\varrho}$ eingeführt,

$$c = \pm m \Omega^2 (r - k).$$

Denken wir uns das bewegte System als eine Fläche, die gleichmässig mit Masse belegt ist, so folgt, da die Winkelgeschwindigkeit um den Pol für alle Punkte des Systems constant ist, der vorhin ausgesprochene Satz. Das Vorzeichen giebt an, ob die Centrifugalkraft nach oder vom Pol gerichtet ist. Geometrisch erkennt man die Richtung der Centrifugalkraft des Massentheilchens aus der Lage desselben in oder ausserhalb des Wendekreises.

Für jedes Massentheilchen, welches auf dem Wendekreis liegt, ist $r = k$, also nach unserm Satze die Centrifugalkraft $= 0$. Dies stimmt mit der bekannten Eigenschaft des Wendekreises überein, dass er der Ort aller derjenigen Punkte ist, für welche die Krüm-

mungsmittelpunkte ihrer augenblicklichen Bahnelemente im Unendlichen liegen.

Wir gehen über zur

B) Bestimmung der Resultante der Centrifugalkräfte nach Grösse und Richtung.

§. 100. In einem Kreise liege eine beliebig gestaltete, beliebig mit Masse belegte Figur, welche das zwangläufig bewegte System darstellt. Der Kreis sei der Wendekreis und ein Punkt auf der Peripherie desselben der Pol. Fig. 83, Taf. IX.

Ziehen wir den Durchmesser $\mathfrak{P}J$, nennen den Winkel, welchen die gesuchte Richtung der Resultante mit demselben bildet, φ, ferner die Winkel des Durchmessers mit den äussersten tangential an die Figur gezogenen Fahrstrahlen α_1 und α_2, legen wir endlich durch $\mathfrak{P}$ ein rechtwinkeliges Ordinatensystem, dessen Y-Axe mit dem Durchmesser zusammenfällt, und ziehen durch das beliebig gewählte Massentheilchen m den Fahrstrahl $\mathfrak{P}R$, so können wir folgende Gleichungen ansetzen:

Es müssen die Componenten der Resultante C gleich sein der Summe der bezüglichen Componenten der einzelnen Centrifugalkräfte nach der X- und Y-Axe.

Wegen der Lage der Figur im Wendekreis müssen wir für die folgenden Berechnungen von der unter b) §. 99 hergeleiteten Gleichung $\frac{r^2}{\varrho} = -(r-k)$ ausgehen.

Für die Componenten || der X-Axe folgt

$$1)\quad \Omega^2 \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} m(k-r) \sin\alpha = C \sin\varphi,$$

parallel der Y-Axe

$$2)\quad \Omega^2 \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} m(k-r) \cos\alpha = C \cos\varphi.$$

Die Ordinaten des Massenmittelpunktes S seien ξ und η.

Dann ist

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} m(k - r)\sin\alpha = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} mk\sin\alpha = M\xi.$$

Das erste Integral kann ebenfalls, wie das zweite, als statisches Moment definirt werden, wenn wir uns die ganze Figur central vom Pol auf den Wendekreis projicirt denken.

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} mk\sin\alpha$$

ist das statische Moment dieses ungleich mit Masse belegten Bogens des Wendekreises in Bezug auf die Y-Axe. Der Massenmittelpunkt S' desselben habe von der Y-Axe den Abstand ξ', dann ist

$$\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} mk\sin\alpha = M\xi',$$

daher

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} m(k - r)\sin\alpha = M(\xi' - \xi),$$

also

$$3)\quad C\sin\varphi = \Omega^2 M(\xi' - \xi).$$

Ebenso folgt ad 2), wenn wir die bezüglichen Abstände der beiden Massenmittelpunkte von der X-Axe η und η' nennen

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} mk\cos\alpha = M\eta'$$

und

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} mr\cos\alpha = M\eta,$$

daher ist

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} m(k - r)\cos\alpha = M(\eta' - \eta)$$

und

$$4)\quad C\cos\varphi = \Omega^2 M(\eta' - \eta).$$

Durch Division der beiden Gleichungen 3) und 4) folgt

$$5)\ tg\,\varphi = \frac{\xi' - \xi}{\eta' - \eta},$$

und durch Quadrirung und Addition

$$6)\ C = \Omega^2 M \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}.$$

Verbinden wir die beiden Massenmittelpunkte S und S' und nennen diese Strecke a, so ist der Winkel, den a mit dem Durchmesser bildet, $\sphericalangle \varphi$, denn er genügt der Gleichung für $tg\,\varphi$. Parallel der Strecke a geht also durch den Pol die Resultante. Ausserdem ist

$$a^2 = (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2.$$

Daher

$$7)\ C = \Omega^2 M a.$$

Diese sehr einfache, bemerkenswerthe Gleichung zeichnet sich besonders dadurch aus, dass in einer einzigen Strecke a und ihrer Richtung alle Werthe enthalten sind, die in Folge der Zwangläufigkeit des Mechanismus die Grösse und Richtung der Centrifugalkräfte bedingen.

Die Resultate können wir in folgenden Satz zusammenfassen:

Satz. Um die Grösse und Richtung der Resultante sämmtlicher Centrifugalkräfte in einem bewegten in sich unveränderlichen System von Massen zu finden, bestimmt man sich zunächst den Massenmittelpunkt S, projicirt dann sämmtliche Massen aus dem Pol auf den Wendekreis, bestimmt deren Mittelpunkt S' und verbindet $SS' = a$. Parallel der Strecke a geht durch den Pol die gesuchte Resultante, und findet man deren Grösse, wenn man das Product aus der Länge a in die Summe aller Massen und das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit um den Pol bildet.

Zerlegen wir die Resultante C in die Richtungen der Geschwindigkeitsradien der zwangläufig geführten Punkte des Mechanismus, so finden wir die Beanspruchung der Kurbeln und der Festpunkte resp. die Normaldrücke auf die Curven, welche diese ersetzen.

Specialfälle.

§. 101. 1) Wenn statt eines beliebig gestalteten Systems eine gerade starre Linie zwangläufig geführt wird, so ist die graphische Construction der Resultante C wesentlich einfacher: Man theilt zweckmässig die gerade Strecke in eine grössere Anzahl gleicher Theile und nimmt an, dass in den Mittelpunkten die einzelnen Centrifugalkräfte angreifen. Fig. 84_a, Taf. IX. Man hat dann ein System centraler Kräfte, deren Grösse durch die polare Entfernung ihres Angriffspunktes vom Wendekreis gegeben ist. Die Zusammensetzung derselben zu einer Resultante und die Bestimmung der Richtung der letzteren erfolgt am leichtesten graphostatisch mit Hilfe des Kräftepolygons, wie dies in Fig. 84_a und Fig. 84_b geschehen ist.

2) Wenn das zwangläufig bewegte System nur aus zwei in je zwei Punkten concentrirten Massen besteht, die unter sich durch eine starre gewichtlose Linie verbunden sind, so gestaltet sich die Construction der Resultante sehr einfach, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen:

a) Im Reuleaux'schen Parallelogramm, Fig. 85, Taf. X, seien in den Endpunkten C und B Massen concentrirt, deren Mittelpunkt auf der Verbindungsstrecke CB in S liege. Der Wendekreis für die gezeichnete Lage des Systems schneidet die Kurbeln CD und BA in w und w_1. Nach diesen Punkten gelangen auch die Massen in C und B, wenn wir sie auf den Wendekreis projiciren, mithin liegt der Mittelpunkt S' auf der Verbindungsstrecke ww_1 und theilt diese Strecke so, dass sich

$$\frac{S'w}{S'w_1} = \frac{SC}{SB}$$

verhält, demnach ist $SS' = a$ und $C = \Omega^2 Ma$ der Grösse nach gefunden.

Tragen wir die Resultante in $\mathfrak{P} \parallel a$ an, so finden wir durch ihre Zerlegung nach den Kurbeln AB und CD die Beanspruchung derselben, resp. der Festpunkte A und D.

b) In dem Kreuzkopf und der Kurbelwarze einer rotirenden Schubkurbel, Fig. 86, Taf. IX, seien die Massen M_1 und M_2 concentrirt.

Construiren wir den Wendekreis, der bekanntlich durch den gleitenden Punkt C, also auch durch die in C concentrirt gedachte Masse M_2 geht und projiciren die Masse M_1 auf den Wendekreis nach w, so liegt der gemeinschaftliche Mittelpunkt S' der projicirten Masse auf der Verbindungsstrecke Cw und theilt dieselbe in dem nämlichen Verhältniss, als der wirkliche Massenmittelpunkt S die Strecke CB; d. h. die Linie $a = SS'$ geht parallel dem Kurbelradius R. In diesen fällt somit auch die vom Pol aus parallel a gezogene Resultantenrichtung. Dies Resultat liess sich übrigens von vornherein einsehen, denn wie gross auch die Masse M_2 sein mag, es kann in ihr, da sie sich auf gerader Bahn bewegt, keine normal zu derselben gerichtete Centrifugalkraft auftreten. Die Richtung der Resultante C wird also durch die im Kreuzkopf befindliche Masse nicht alterirt, und, wie zu erwarten steht, auch nicht ihre Grösse. Um diese zu bestimmen, haben wir zunächst a zu berechnen.

Nach der unter A) Fall b) hergeleiteten Gleichung ist $k - r = \frac{r^2}{R} = Bw$. Bezeichnen wir die Länge der Schubstange mit l, die Entfernung des Massenmittelpunktes S von C mit b, so haben wir die Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{Bw}{l} = \frac{r^2}{Rl},$$

woraus

$$a = \frac{b}{l}\,\frac{r^2}{R}$$

folgt; dies und $M = M_1 + M_2$ in die Gleichung

$$C = \Omega^2 M a$$

eingesetzt, giebt

$$C = \frac{\Omega^2 r^2}{R}\,\frac{b}{l}\,(M_1 + M_2).$$

Nun ist $\Omega r = v$, der Geschwindigkeit der Kurbelwarze, folglich

$$C = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{b}{l}\,(M_1 + M_2),$$

ferner verhält sich

$$\frac{b}{l} = \frac{M_1}{M_1 + M_2},$$

folglich ist

$$C = \frac{v^2}{R} M_1,$$

also auch die Resultante der Grösse nach unabhängig von der Masse M_2.

2) Beanspruchung einer zwangläufig bewegten Geraden durch die ihre einzelnen Punkte beschleunigenden Kräfte.

§. 102. Wir haben im vorigen Abschnitte die Resultante sämmtlicher Centrifugalkräfte und durch Zerlegung derselben den Zug oder Druck in den Kurbeln, resp. den Festpunkten des Systems, bestimmt. Dieser durch die Centrifugalkräfte hervorgerufene Druck oder Zug pflanzt sich in bestimmter Richtung durch das System hindurch, bis er nach den Punkten gelangt, durch welche er aufgenommen wird. Hierbei wird offenbar die innere Festigkeit des Systems, die Cohäsion der einzelnen Theilchen auf Trennung und gegenseitige Verschiebung beansprucht.

Aber es wirken ausser diesen Centrifugalkräften noch andere Kräfte im System; die die Massentheilchen in der Richtung ihrer Bahntangenten beschleunigenden resp. verzögernden Kräfte, die wir bekanntlich durch den Ausdruck $m \frac{dv}{dt}$ messen, beanspruchen ebenfalls die innere Festigkeit des Systems.

Wir könnten uns die Aufgabe stellen, ein ganz beliebig gestaltetes System auf diese beiden inneren Beanspruchungen durch die centrifugalen und tangentialen Kräfte hin zu untersuchen, doch nehmen wir hiervon Abstand, indem wir die Aufgabe specialisiren und als zwangläufiges System uns eine gerade materielle Linie in Bewegung gesetzt denken.

Ich halte mich dieserhalb an die bezügliche in meiner Abhandlung „die Beschleunigungen in Pleuelstangen etc." (Civilingenieur 1872) nur für den speciellen Fall des Kurbelgetriebes angestellte Untersuchung.

Bekanntlich existirt in jedem Augenblick der Bewegung eines zwangläufig bewegten Systems in der Ebene ein Punkt, den man das Beschleunigungscentrum nennt. Dasselbe liegt auf dem Wendekreis, hat als Systempunkt keine Beschleunigung und besitzt die Eigenschaft, dass, wenn man von ihm aus nach irgend welchen

Systempunkten Strahlen zieht, die effectiven Beschleunigungen derselben hinsichtlich ihrer Grösse den Strahlen proportional sind und mit ihnen gleiche Winkel einschliessen.

Wegen der Construction des Beschleunigungscentrums verweise ich auf das in meiner citirten Abhandlung angegebene graphische Verfahren.

Für die folgende Untersuchung haben wir nur nöthig zu wissen, dass solch ein charakteristischer Punkt, wie das Beschleunigungscentrum, existirt.

Was nun die Beanspruchung der zwangläufig geführten Geraden durch die in ihr auftretenden beschleunigenden Kräfte betrifft, so zerfällt dieselbe in zwei Arten:

Die mit zweien ihrer Punkte zwangläufig geführte Gerade wird durch die Componenten der beschleunigenden Kräfte senkrecht zu ihrer Richtung auf Biegung, durch die anderen Componenten auf Ausdehnung resp. Zusammendrückung in Anspruch genommen.

§. 103. a) Beanspruchung auf Biegung:

Satz. Bei Annahme gleicher Massenvertheilung in der bewegten Geraden gruppiren sich die senkrecht zu ihrer Richtung gebildeten Componenten der beschleunigenden Kräfte in jeder Lage nach einer geraden Linie, wie auch das Gesetz für die Winkelgeschwindigkeit um den Pol beschaffen sei.

Um diesen Satz zu beweisen, ziehen wir vom Beschleunigungscentrum O, Fig. 87, Taf. IX, dessen Lage durch das Geschwindigkeitsgesetz und die Art der Zwangläufigkeit der bewegten Geraden gegeben ist, einen Strahl nach einem beliebigen Punkte E der Geraden und tragen in letzterem die Richtung seiner effectiven Beschleunigung an. Der Winkel zwischen dieser und dem Strahl a nach dem Beschleunigungscentrum sei η. Ferner sei der Winkel, den a mit der Richtung der bewegten Geraden bildet, χ. Setzen wir die beschleunigende Kraft in $E = Ba$, wo B eine Constante bedeutet, so ist die die bewegte Gerade auf Biegung (wie einen frei aufliegenden Träger) beanspruchende Componente der beschleunigenden Kraft

$$y = Ba \sin(\chi - \eta).$$

Ziehen wir noch vom Beschleunigungscentrum O aus einen Strahl, der mit der bewegten Geraden den $\sphericalangle \eta$ bildet und nennen den $\sphericalangle EOG = \psi$, so folgt

$$\chi = \psi + \eta,$$

somit

$$y = B a \sin \psi.$$

$a \sin \psi$ ist das von E auf den Strahl OG gefällte Loth EN, somit y proportional EN.

Für irgend einen andern Punkt E' der bewegten Geraden haben wir die analogen Gleichungen anzusetzen (die correspondirenden Werthe sind oben gestrichelt). Es ist

$$y' = B a' \sin (\chi' - \eta),$$

da nun

$$\chi' = \psi' + \eta \text{ ist},$$

so folgt

$$y' = B a' \sin \psi'.$$

$a' \sin \psi'$ ist das von E' auf die Gerade OG gefällte Loth; die zugehörige Ordinate y' ist also proportional $E'N'$, d. h.

$$\frac{y}{y'} = \frac{EN}{E'N'} = \frac{GE}{GE'},$$

d. h. die Endpunkte aller Ordinaten y liegen auf einer geraden Linie, welche durch G geht.

Zur Construction derselben ist allein die Richtung und Grösse der Beschleunigung eines Punktes der Geraden nothwendig. Diese und der Wendekreis bestimmen die Lage des Beschleunigungscentrums und dieses wieder den Punkt G, durch welchen die das Belastungsgesetz der bewegten Geraden darstellende Linie hindurch geht. Bei ungleicher Massenvertheilung der bewegten Geraden hat man jede Ordinate des im Allgemeinen trapezförmigen Diagrammes mit der in ihrem Fusspunkte concentrirt gedachten Masse zu multipliciren und den erhaltenen Werth wieder als Ordinate aufzutragen. Aus der erhaltenen Curve, welche die Vertheilung der biegenden Kräfte darstellt, kann man nun graphostatisch leicht die Momentencurve und die Biegungsspannung in den einzelnen Punkten der bewegten Geraden ermitteln.

§. 104. b) Beanspruchung der Geraden in ihrer eigenen Richtung.

Hier haben wir den anologen

Satz. Die Componenten der beschleunigenden Kräfte in der Richtung der bewegten Geraden gruppiren sich für jede Lage derselben nach einer geraden Linie, wie auch das Gesetz der Winkelgeschwindigkeit um den Pol beschaffen sei.

Zum Beweise dieses analogen Satzes errichten wir auf dem Strahl OG in O eine Normale, welche die bewegte Gerade in K schneidet. Punkt K hat nur eine Beschleunigung senkrecht zur Richtung der Geraden, also keine Componente, welche in deren Richtung fällt.

Errichten wir nun in dem beliebig gewählten Punkte E die Ordinate

$$y_1 = B a \cos(\chi - \eta)$$

gleich der bezüglichen Componente der effectiven Beschleunigung des Punktes E, so können wir auch hier

$$\psi = \chi - \eta$$

setzen und erhalten

$$y_1 = B a \cos \psi.$$

Nun ist aber $a \cos \psi$ das von E auf den Strahl OK gefällte Loth. Für den Punkt E' würden wir haben:

$$y_1' = B a' \cos \psi',$$

$a' \cos \psi'$ ist das von E' auf OK gefällte Loth. Diese beiden Lothe verhalten sich aber wie die Strecken KE und KE', folglich ist auch

$$\frac{y_1}{y_1'} = \frac{KE}{KE'},$$

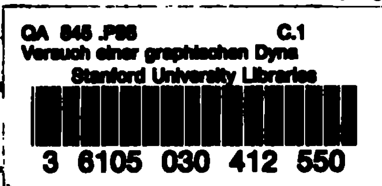
d. h. die Endpunkte der Ordinaten y liegen in einer geraden Linie, die durch K geht.

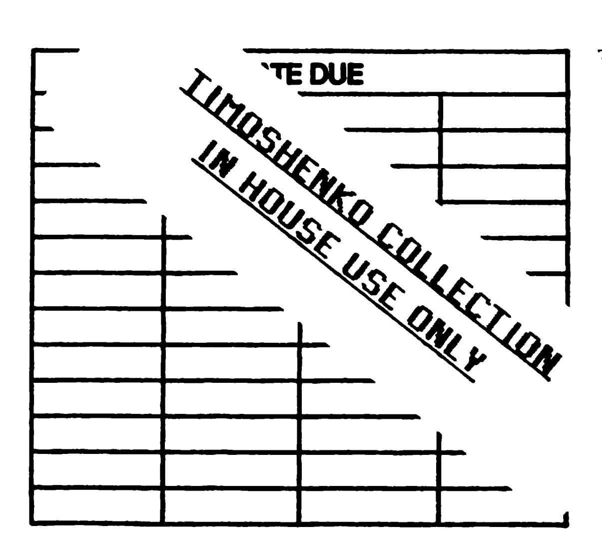
Bei ungleicher Massenvertheilung der bewegten Geraden erhalten wir auch hier die bezügliche Beanspruchung, wenn wir jede Ordinate des im Allgemeinen trapezförmigen Diagrammes mit der in ihrem Fusspunkte concentrirt gedachten Masse multipliciren.

In Bezug auf die Construction des trapezförmigen Diagrammes gilt das unter 1) Gesagte.

Druck von A. Th. Engelhardt in Leipzig.




QA 845 .P86 C.1
Versuch einer graphischen Dyna
Stanford University Libraries
3 6105 030 412 550


TE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

